2024
都立大集中講義 5-1

〈Serreファイブレーションとホモトピー長完全列（つづき）〉

例

- $U(n) = \{ U \in M_n(\mathbb{C}) \mid U^* U = E_n \}$: n次ユニタリ群　これはLie群となる。

$i: U(n) \longrightarrow U(n+1)$: 単射準同型
$U \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$

これより $U(n) \curvearrowright U(n+1)$: 自由に作用する

この作用に関して　$U(n+1)/U(n) \longrightarrow S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ はwell-definedで
$[u_1, \cdots, u_{n+1}] \longmapsto u_1$　同相写像となる。

$\boxed{\text{宿題29}}$ このことを示せ。（ヒント：コンパクト空間からHausdorff空間への連続全単射は…？）

これより Serre ファイブレーション $U(n+1) \to S^{2n+1}$ を得る。（ファイバーは$U(n)$）。

ホモトピー長完全列を考える。$\pi_i(S^{2n+1}) = *$ $(i \leq 2n)$ なので

$$i_* : \pi_i(U(n)) \cong \pi_i(U(n+1)) \quad \text{for } i \leq 2n-1.$$

これより各 i に対し n が十分大きければ $\pi_i(U(n))$ は n によらない。

この群をユニタリ群の安定ホモトピー群といい、$\pi_i(U)$ で表す。

（Uを空間で実現することもできる）

定理（古いBottの周期性定理）

$$\pi_i(U) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (i : \text{odd}) \\ 0 & (i : \text{even}). \end{cases} \quad \square$$

これを示すにはもう少し努力がいる。

〈ホモトピー群について、この先は？〉

- Serreスペクトル系列によるコホモロジーの計算（と普遍係数定理，Hurewiczの定理）を使う
  $\rightsquigarrow$ $\pi_{n+1}(S^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $(n \geq 3)$ が比較的容易にわかる。他にもわかることはある。
- Serreのℭ理論，p局所化，有理化などを使う
  $\rightsquigarrow$ $\pi_i(S^n)$ は有限生成アーベル群となる（Serre）

$$\pi_i(S^n) \otimes \mathbb{Q} \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & (i=n \text{ または } n:\text{even かつ } i = 2n-1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases} \quad (\text{Serre}).$$

$$\pi_i(S^3) \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_{(p)} & (i = n) \\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & (i = 2n) \\ 0 & (0 \leq i < n,\ n < i < 2n) \end{cases} \quad (\text{Serre}).$$

2024
都立大集中講義5-2.

つづき

など，"素数p毎" に見ると計算しやすくなることがある．

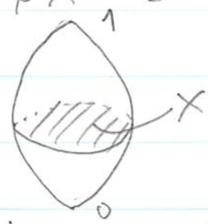
・安定ホモトピー群を見る．

定理（Freudenthalの懸垂定理）

X: n-連結 のとき $\pi_i(X)\cong\pi_{i+1}(SX)$ $(i\le 2n)$ □

ただし $SX = I\times X/\sim$ $(\forall x,x'\in X,\ (0,x)\sim(0,x'),\ (1,x)\sim(1,x'))$

: Xの懸垂という suspension



例 $S(S^n)=S^{n+1}$

（懸垂の代わりに被約懸垂を使うことが多い） reduced suspension

。X: 弧状連結 ⇒ SX: 単連結 が van Kampen から従う

宿題30 このことを実際にvan Kampenの定理から示せ．

また，上の定理から $n\ge 1$ のとき X: n-連結 ⇒ SX: $(n+1)$-連結 となる．

これより 各iに対し nが十分大きければ $\pi_{i+n}(S^nX)$ はnによらない．

これを Xの安定ホモトピー群といい，$\pi_i^S(X)$ と書く

注: ユニタリ群の安定ホモトピー群 $\pi_i(U)$ とは別のもの

。安定ホモトピー群は一般ホモロジー論となることが知られており，

Mayer-Vietoris 完全列など計算の道具が多く，少し計算しやすい．

－このように空間を"安定化"させた世界でのホモトピー論もある（安定ホモトピー論）

・文献

。Toda, Composition methods in homotopy groups of spheres (1962).

EHP sequence, Toda bracket などを使って

少なくとも $\pi_{n+k}(S^n)$ を $n\le k+2$, $k\le 19$ の範囲で計算している

（実際にはもっと多くのことが書かれている）

—

〈おまけ：解析的な性質とホモトピー群〉

・ $\ell^\infty(\mathbb{Z}, M_k(\mathbb{C})) = \{(A_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mid \forall i,\ A_i\in M_k(\mathbb{C}),\ \sup_i\|A_i\|<\infty\}$ とおく．

（位相は $\|(A_i)_i\| = \sup_i\|A_i\|$ で定める）

$\cup$

$\ell^\infty(\mathbb{Z},U(k)) = \{(U_i)_{i\in\mathbb{Z}}\in\ell^\infty(\mathbb{Z},M_k(\mathbb{C})) \mid \forall i,\ U_i$ はユニタリ行列$\}$.

のホモトピー群を求めたい

2024
都立大集中講義5-3

定理

$$\pi_p(\ell^\infty(\mathbb{Z},U(k)))\cong\begin{cases}\ell^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) & (p=1,3,\dots,2k-1)\\ \prod_{i\in\mathbb{Z}}\pi_p(U(k)) & (p\geq 2k)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}$$ □

注: $\ell^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{Z})=\{(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}\mid \forall i,\ a_i\in\mathbb{Z},\ \sup_i|a_i|<\infty\}\subsetneq\prod_i\mathbb{Z}$.

証明

$f=(f_i)_i:S^p\to\ell^\infty(\mathbb{Z},U(k))\subset\prod_{i\in\mathbb{Z}}U(k)$ $(f(x_0)=(E_k)_{i\in\mathbb{Z}})$ を考える.

S^pはコンパクトなので, fは一様連続である

つまり $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ s.t. $\forall x,x'\in S^p\ (d(x,x')<\delta\Rightarrow\|f(x)-f(x')\|<\varepsilon)$

ここで $\|f(x)-f(x')\|=\sup_{i\in\mathbb{Z}}\|f_i(x)-f_i(x')\|$ なので

写像の族として $(f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ は 同程度連続 (equicontinuous)

$U(k)$は有界なので, Ascoli-Arzelàの定理より,

$\{f_i\mid i\in\mathbb{Z}\}\subset Map(S^p,U(k))$ の閉包はコンパクト

よって $\forall\varepsilon>0$ に対し, 有限個の写像の列 $g_1,\dots,g_r:S^p\to U(k)$ が存在して

$\forall i\in\mathbb{Z},\ \exists j_i\in\{1,\dots,r\}$ s.t. $\|f_i-g_{j_i}\|<\varepsilon$

$U(k)$はコンパクトかつ局所可縮なので, 十分近い写像たちはホモトピック.

よって $\varepsilon>0$ を十分小さくとれば $f=(f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ と $g=(g_{j_i})_{i\in\mathbb{Z}}$ はホモトピック. …①

第i成分への射影 $\ell^\infty(\mathbb{Z},U(k))\to U(k)$を用いて

$\Phi:\pi_p(\ell^\infty(\mathbb{Z},U(k)))\to\prod_{i\in\mathbb{Z}}\pi_p(U(k))$ を考える

定義域の任意の元は①のような写像で代表されるので 単射 (ホモトピーは一様にとれる)

また, ①のようなgに対し, $\Phi[g]=(\alpha_i)_{i\in\mathbb{Z}}$と書くと,

α_iたちは高々r種類の値しかとらない

よって p:odd, $p\leq 2k-1$ のとき $\pi_p(U(k))\cong\mathbb{Z}$だったので Φの像は $\ell^\infty(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$.

また, $p\geq 2k$ のとき $\pi_p(U(k))$は有限群となることが知られているので Φは全射.

他の場合 $\pi_p(U(k))=0$なので よい. ■

◦ このように, 解析的な対象のホモトピー群を考えるときは

(Ascoli-Arzelàのような) 解析的な道具を使うこともある.