2024
都立大集中講義 2-1

・<u>前回の補足</u>

X が可縮なら $\forall i,\ \pi_i(X) = *$ (1点集合).

$\boxed{\text{宿題8}}$ このことの証明を書き下せ.

〈基本群〉

fundamental group

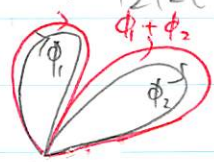
・基点付空間X に対し, $\pi_1(X)$ を X の基本群という

∘ $\pi_1(X) = \{\phi : I \to X \mid \phi(0)=\phi(1)=x_0\} /$ ホモトピー

$\phi : I \to X$ で $\phi(0)=\phi(1)=x_0$ なるものを X内の基点付ループという.

∘ $[\phi_1]+[\phi_2] = [\phi_1+\phi_2]$

$$(\phi_1+\phi_2)(t) = \begin{cases} \phi_1(2t) & (0 \le t \le \frac{1}{2}) \\ \phi_2(2t-1) & (\frac{1}{2} \le t \le 1) \end{cases}$$



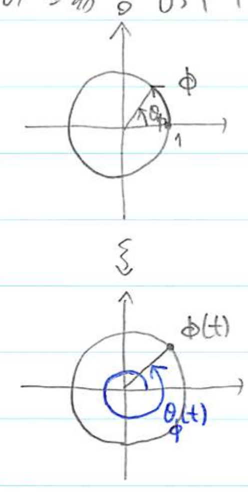
∘ $\pi_1(X)$ はこの演算で群となる. 一般に可換ではない

問題 基本群をどのように"求める"ことができるか?

何がわかれば求めたことになるのかも難しい.

・S^1 の場合のアイデア

∘



ϕ : S^1 のループに対し

各 $t \in I$ までにのべどれだけ回転したかを測ることができるかも. (一般角で)

$\rightsquigarrow\ \theta(1) = 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$ (最終的にϕがどのくらい回転したか)

n は ϕの回転数と呼ぶべきもの

$\phi \simeq \phi' \Longrightarrow \theta_\phi(1) = \theta_{\phi'}(1)$ となると予想できる

これより $\pi_1(S^1)$ の元は回転数で分類できるはず

$\rightsquigarrow\ \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$!

∘このアイデアは「被覆空間」によって実現される.

<u>定義</u>

$\hat{X}, X$: 位相空間 のとき

$p : \hat{X} \to X$ が被覆空間とは次をみたすこと.

(i) $\hat{X}, X$ は弧状連結, 局所弧状連結

たとえば多様体は局所弧状連結

復習 $p^{-1}(U) = \{\hat{x} \in \hat{X} \mid p(\hat{x}) \in U\}$ pによるUの逆像.

(Xが局所弧状連結とは $\forall x \in X$, $\forall U$: xの開近傍に対し $\exists V$: xの弧状連結な開近傍で $V \subset U$ となるもの)

(ii) p は全射.

(iii) 任意の $x \in X$ に対し xの開近傍U と同相写像 $h : p^{-1}(U) \cong U \times p^{-1}(x)$ が存在して $pr_1 \circ h = p$ となること.

$pr_1 : U \times p^{-1}(x) \to U$ は第1成分への射影

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{h} & U \times p^{-1}(U) \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle pr_1} & \\ & U & \end{array}$$

正確には $p^{-1}(\{x\})$ のこと. □

2024
都立大集中講義 2-2.

定義のhを局所自明化という.

・被覆空間の例

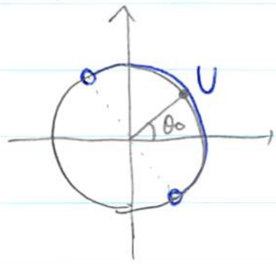
。$p(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta)$ で定まる $p:\mathbb{R}\to S^1$ は被覆空間.

∵ (i), (ii)はOK.

$(\cos\theta_0,\sin\theta_0)\in S^1$ を任意にとる.

このとき $U=\{(x,y)\in S^1 \mid \exists\,\varepsilon\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\ \text{s.t.}\ (x,y)=(\cos(\theta_0+\varepsilon),\sin(\theta_0+\varepsilon))\}$

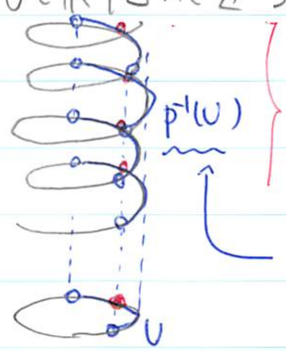
とおく:



Uは$(\cos\theta_0,\sin\theta_0)$の開近傍

ここで $p^{-1}((\cos\theta_0,\sin\theta_0))=\{\theta\in\mathbb{R}\mid\exists\,n\in\mathbb{Z}\ \text{s.t.}\ \theta=\theta_0+2n\pi\}$

$p^{-1}(U)=\{\theta\in\mathbb{R}\mid\exists\,n\in\mathbb{Z}\ \text{s.t.}\ |\theta-\theta_0-2n\pi|<\frac{\pi}{2}\}$ となる.



$p^{-1}(U)$は"Uと同相なものたちの直和"!

よって求める $h:p^{-1}(U)\to U\times p^{-1}(x)=\coprod_{\tilde{x}\in p^{-1}(x)}U\times\{\tilde{x}\}$ が得られる.

。有限群Gが弧状連結かつ局所弧状連結なHausdorff空間Gに作用しているとする.

(i.e. 各$g\in G$に対し $\alpha(g):\tilde{X}\to\tilde{X}$ が定まっていて $\alpha(gh)=\alpha(g)\circ\alpha(h)$ となる)

また、この作用は自由であるとする

(i.e. $\alpha(g)x=x$ となるのは $g=1$ (単位元) のときに限る)

このとき、商写像 $p:\tilde{X}\to X=\tilde{X}/G$ は被覆空間となる.

宿題9 このことの証明を書き下せ.

− $\alpha:S^n\to S^n$ を $\alpha(x)=-x$ で定めると $\alpha^2=\mathrm{id}_{S^n}$ なので $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の作用を定める.

これに上の事実を適用すると被覆空間 $p:S^n\to S^n/_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}=\mathbb{RP}^n$ を得る.

実射影空間

− このような例は他にもたくさんある

宿題10 上の事実は作用が自由で$\tilde{X}$がHausdorffであっても、
Gが無限群のときは一般に成り立たない.
実際にそのような例を与え説明せよ.(この問題は手間がかかると思われる)

2024
都立大集中講義 2-3

定理 (Homotopy lifting property)

$p: \hat{X} \to X$：被覆空間

$\hat{f}: A \to \hat{X}$, $F: I \times A \to X$, $\forall a \in A$, $p(\hat{f}(a)) = F(0, a)$ とする.

このとき 次をみたす $\hat{F}: I \times A \to \hat{X}$ が唯一つ存在する.

(i) $\forall a \in A$, $\hat{F}(0, a) = \hat{f}(a)$

(ii) $\forall t \in I$, $\forall a \in A$, $p(\hat{F}(t, a)) = F(t, a)$ □

- このとき $\hat{F}$ を F の<u>リフト</u>という
- $\hat{F}$ は $\hat{f}$ から始まるホモトピーで, p で写すと F に一致するようなもの
- $A = 1$点 のときは次の道のlifting propertyになる：

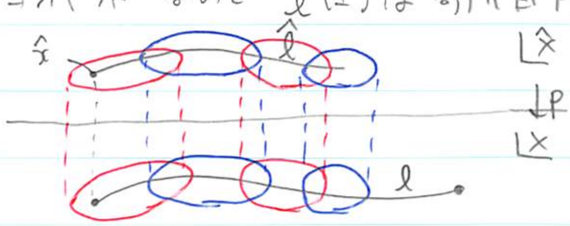
$l: I \to X$, $\hat{x} \in p^{-1}(l(0))$ のとき 次をみたす $\hat{l}: I \to \hat{X}$ が存在する：

(i) $\hat{l}(0) = \hat{x}$

(ii) $\forall t \in I$, $p(\hat{l}(t)) = l(t)$

<u>証明の方針</u> ($A = 1$点 のときを考える. ただし一般のAでもほとんど同じ)

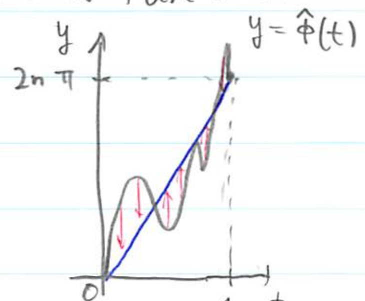
I：コンパクト なので $l(I)$ は局所自明化をもつ開集合 $U_1, \ldots, U_r \subset X$ で覆える.
(有限個!)



左図のように局所自明化を使って順にリフトを延長できる (有限個なので いつか終わる)

一意性は I の連結性を使って確かめられる ▨

- $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ の証明
  - 任意の基点付ループ $\phi: I \to S^1$ ($\phi(0) = \phi(1) = (1, 0)$ (基点)) をとる.
  - すると $p: \mathbb{R} \to S^1$ に対する ϕ のリフト $\hat{\phi}: I \to \mathbb{R}$ で
    $\hat{\phi}(0) = 0$ となるものが唯一つ存在する (上の定理)
    $(\cos\hat{\phi}(1), \sin\hat{\phi}(1)) = (p \circ \hat{\phi})(1) = \phi(1) = (1, 0)$ なので $\hat{\phi}(1) = 2n\pi$ となる $n \in \mathbb{Z}$ が存在.
    ] この n を ϕ の回転数と呼ぶ.
  - $\hat{\phi}$ のグラフは概ね以下のようになる



$\hat{\psi}: I \to \mathbb{R}$ を $\hat{\psi}(t) = 2n\pi t$ で定めると,
左図のようにして $\hat{\phi}$ は $\hat{\psi}$ に
端点を固定してホモトピック.
$\rightsquigarrow$ $[\phi] = [p \circ \hat{\psi}]$ in $\pi_1(S^1)$
(*)

$\boxed{\text{宿題11}}$ $\hat{\phi}$ から $\hat{\psi}$ へのホモトピーを具体的な式で書き下せ.

2024
都立大集中講義 2-4

つづき

- homotopy lifting property から，$\phi, \phi' : I \to S^1$：基点付ループが
ホモトピックなら，リフト $\hat{\phi}, \hat{\phi}' : I \to \mathbb{R}$ に対し $\hat{\phi}(1) = \hat{\phi}'(1)$ が確認できる．(**)

$\boxed{\text{宿題12}}$ 実際にこのことを確認せよ．

- (**) から回転数を対応させる $\rho : \pi_1(S^1) \to \mathbb{Z}$ は well-defined．
(*) から ρ は単射．
具体的に "n 回転" のループを与えることにより ρ は全射．
よって $\rho : \pi_1(S^1) \to \mathbb{Z}$ は全単射．
"m 回転" と "n 回転" のループをつなぐと "$m+n$ 回転" になるので
$\rho : \pi_1(S^1) \to \mathbb{Z}$ は群の同型写像．　$\therefore \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$!

- covering space と基本群

定理

群 G が $\hat{X}$ に作用していて商写像 $p : \hat{X} \to X = \hat{X}/G$ は被覆空間とする．
このとき，$\pi_1(\hat{X}) = *$（単位群）なら，$\pi_1(X) \cong G$．　□

- $p : \mathbb{R} \to S^1$ の証明と似た議論で証明できる．

- 群の表示と融合積（van Kampen の定理の準備）
  - S：集合 のとき $a_1, \cdots, a_n \in S$ を並べたもの $a_1 \cdots a_n$ を S の語(word) という．
    - （何も並べないもの）も語として扱う（空語 (empty word)）．
  - S：集合 に各 $a \in S$ の逆元 a^{-1} を形式的に付け加えたものを $\bar{S}$ と書くことにする．
  - $\bar{S}$ の語たちの集合 W に次で生成される同値関係を与える．

$$w_1 a a^{-1} w_2 \sim w_1 w_2 \sim w_1 a^{-1} a w_2 \qquad (w_1, w_2 \in W,\ a \in S)$$

  - この同値関係による商 $F(S)$ は "語を並べる" 操作で群となる．
$F(S)$ を S で生成される自由群という．
the free group generated by S

例

$S = \{a\}$ のとき　$F(S) = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$　$\left(\begin{array}{l} \cdots aa \cdots = \cdots a^2 \cdots \\ \cdots a^{-1}a^{-1} \cdots = \cdots a^{-2} \cdots \end{array}\right.$ などと書く．$\left.\right)$

$S = \{a, b\}$ のとき　$F(S) = \{1, a^n, b^n, a^n b^m, b^n a^m, a^l b^n a^m, \cdots\}$

$ab \neq ba$!

  - 群 G に対し生成元 $S \subset G$ と関係式 $R \subset F(S)$ をうまくとると
$G \cong F(S)/\langle R \rangle_N$ と書ける．これを群の表示という
presentation of group
$\langle R \rangle_N$：R の生成する正規部分群
このとき $G = \langle S \mid R \rangle$ などと書く．

2024
都立大集中講義 2-5

例

- $\mathbb{Z} \cong \langle a \rangle$
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \langle a \mid a^n \rangle$ ($= \langle a \mid a^n = 1 \rangle$ とも書く)
- $\mathbb{Z}^2 \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$ ☆
- Σ_3 (3次対称群) $\cong \langle a, b \mid a^3, b^2, (ab)^2 \rangle$ ($= \langle a, b \mid a^3 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$ とも書く) ☆☆

$\boxed{\text{宿題13}}$ ☆ を示せ

$\boxed{\text{宿題14}}$ ☆☆ を示せ. ($F(S)/\langle R \rangle_N \longrightarrow G$: 全射 は比較的簡単だが, 単射性を示すのが難しい)

∘ G, H, K : 群　$\phi : K \to G$, $\psi : K \to H$: 準同型 のとき

融合積 $G \underset{K}{*} H$ は 語 $g_1 h_1 g_2 h_2 \cdots g_n h_n$ ($g_i \in G, h_i \in H, n \geq 0$)

たちの集合を $\cdots g_i \psi(k) g_{i+1} \cdots \sim \cdots (g_i \phi(k) g_{i+1}) \cdots$ ($k \in K$)

$\cdots h_i \phi(k) h_{i+1} \cdots \sim \cdots (h_i \psi(k) h_{i+1}) \cdots$ ($k \in K$)

で生成される同値関係で割ったもの. 語を並べる操作で群となる.

- $K = *$ のとき $G \underset{K}{*} H = G * K$ と書き, G と H の自由積という.

例

- $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \langle a, b \mid a^2, b^2 \rangle = \{1, a, b, ab, ba, aba, bab, \cdots\}$

• van Kampen の定理

定理 (van Kampen の定理)

(X, x_0) : 基点付空間, $U_1, U_2 \subset X$: 開集合 に対し

$x_0 \in U_1 \cap U_2$, $U_1 \cup U_2 = X$, $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ は弧状連結 とする.

このとき 自然な同型 $\pi_1(X) \cong \pi_1(U_1) \underset{\pi_1(U_1 \cap U_2)}{*} \pi_1(U_2)$ が存在する. □

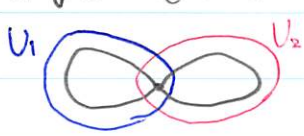
証明の方針

X のループやホモトピーを "細かく刻む" と U_1 や U_2 からくる部分に分けられる.

このことをうまく使う. ■

例

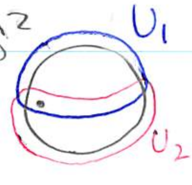
- $S^1 \vee S^1$ (S^1 と S^1 の一点和)



$\pi_1(U_1) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_1(U_2) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_1(U_1 \cap U_2) = *$

$\rightsquigarrow \pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \pi_1(U_1) * \pi_1(U_2) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$: 2個の元で生成される自由群. //

- S^2



$\pi_1(U_1) = *$, $\pi_1(U_2) = *$, $\pi_1(U_1 \cap U_2) \cong \mathbb{Z}$.

$\rightsquigarrow \pi_1(S^2) = *$. //