参考になりそうな本
Hatcher, Algebraic Topology
(著者のサイトから入手可)
小松, 中岡, 菅原, 位相幾何学I
Switzer, Algebraic Topology : Homotopy and Homology
Whitehead, Elements of Homotopy Theory

← 宿題の答えはこれらの本の中で見つかるはず

2024 都立大集中講義 1-1

この講義で主に扱う位相空間は $\mathbb{R}^n$ の部分集合や多様体など

〈概要〉

- $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$: n次元球面.
- X: 位相空間, $x_0 \in X$ のとき
  対 $X = (X, x_0)$ を基点付空間 (based space) という. x_0 を X の基点 (base point) という
- $e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in S^n$: 基点 としておく
- $f : X \to Y$: 基点付空間の間の連続写像 のとき (以下 "連続" は略す)
  f が基点を保つ とは $f(x_0) = y_0$ (x_0, y_0 は基点) となること
- $\pi_i(X) = \{f : S^i \to X$: 基点を保つ$\}$ / 基点を保つホモトピー : X の i 次ホモトピー群
  - これを理解することが目標
  - 計算は一般に難しい (ほぼ不可能) とされている.

前提知識

- 位相空間 (多様体論に現れる射影空間などを知っていることが望ましい).
- 群, アーベル群

注意

- 私はホモトピー群の専門家ではない.
  - 他の対象との関係の方がくわしい

〈ホモトピーとホモトピー群〉

$I = [0, 1]$ と表す.

- X, Y : 位相空間, $f, g : X \to Y$ のとき
  $H : I \times X \to Y$ が f から g へのホモトピー (homotopy) とは
  $\forall x \in X$, $H(0, x) = f(x)$, $H(1, x) = g(x)$ となること.

ホモトピーは写像を連続的に変形するもの

f から g へのホモトピーが存在するとき, f は g にホモトピックという
$f \simeq g$ と書く.
f is homotopic to g.

$x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ を基点とする.

- f, g が基点を保つとき, ホモトピー H が基点を保つ とは
  $\forall t \in I$, $H(t, x_0) = y_0$ となること.
  f から g への基点を保つホモトピーが存在するとき, f は g に基点を保ってホモトピック という.
  $f \simeq_* g$ と書く.

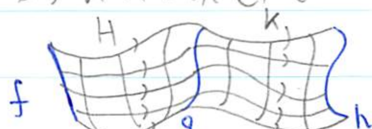
2024
都立大 集中講義 1-2

◦ ホモトピックであることは写像の同値関係:

− $f: X \to Y$ に対し
$H: I\times X \to Y$ を $H(t,x)=f(x)$ (tによらない) と定めると
Hはfからfへのホモトピー

− $f,g: X\to Y$ に対しHをfからgへのホモトピーとする.
$\bar{H}: I\times X\to Y$ を $\bar{H}(t,x)=H(1-t,x)$ で定めると
$\bar{H}$はgからfへのホモトピー

− $f,g,h: X\to Y$ に対しHをfからgへのホモトピー, Kをgからhへのホモトピーとする.
$L: I\times X\to Y$ を $$L(t,x)=\begin{cases}H(2t,x) & (0\le t\le \frac{1}{2})\\ K(2t-1,x) & (\frac{1}{2}\le t\le 1)\end{cases}$$ で定めると
Lはfからhへのホモトピー



◦ 同様に 基点を保ってホモトピックであることは基点を保つ写像の同値関係

• $f,f': X\to Y$, $g,g': Y\to Z$, $f\simeq f'$, $g\simeq g'$ のとき
$g\circ f \simeq g'\circ f'$ となる

$\boxed{\text{宿題1}}$ このことの証明を書き下せ.

• $f: X\to Y$ が ホモトピー同値写像 (homotopy equivalence) とは
$g\circ f\simeq \mathrm{id}_X$, $f\circ g\simeq \mathrm{id}_Y$ となる $g: Y\to X$ が存在すること.

このとき, gはfのホモトピー逆写像 (homotopy inverse) という

XからYへのホモトピー同値写像が存在するとき, XはYにホモトピー同値という. (X is homotopy equivalent to Y.)

◦ ホモトピー同値であることは位相空間の同値関係

$\boxed{\text{宿題2}}$ このことの証明を書き下せ

◦ 同様に基点を保つホモトピー同値写像も定義される.

• XからYへの写像のホモトピー類全体を $[X,Y]$ と書く ($[X,Y]$は集合).
X,Yが基点付空間のとき, XからYへの基点を保つ写像の基点を保つホモトピー類全体を $[X,Y]_*$ と書く.

◦ $\pi_i(X)=[S^i,X]_*$: Xのi次ホモトピー群

◦ $f: X\to Y$: 基点を保つ とする
このとき $f_*: \pi_i(X)\to\pi_i(Y)$ が誘導される.
$$[\varphi] \longmapsto [f\circ\varphi]$$

2024
都立大集中講義 1-3.

つづき

- 特に, f が基点を保つホモトピー同値写像ならば, $f_*: \pi_i(X) \to \pi_i(Y)$ は全単射となる

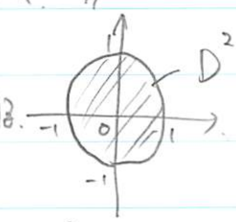
∘ 我々の目標は $\pi_i(X)$ の計算のしかたを理解すること!

• ホモトピー同値の例

∘ X と Y が同相ならば, ホモトピー同値 ←「ホモトピー同値」は「同相」よりもゆるい概念!

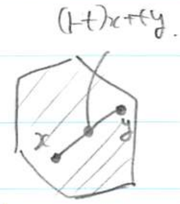
(∵) $f: X \to Y$: 同相写像とすると
$f^{-1}\circ f = id_X$, $f\circ f^{-1} = id_Y$ より $f^{-1}\circ f \simeq id_X$, $f\circ f^{-1} \simeq id_Y$ //

∘ $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \le 1\}$ は1点とホモトピー同値 (可縮)



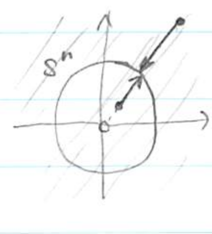
(∵) $f: \{0\} \hookrightarrow D^n$: 包含写像, $g: D^n \to \{0\}$: 定値写像とする.
$g\circ f = id_{\{0\}}$ である.
一方 $H: I \times D^n \to D^n$ を $H(t,x) = tx$ で定める. ($x\in D^n, t\in I \Rightarrow (1-t)x \in D^n$)
すると $H(0,x) = 0$, $H(1,x) = x$ より $f\circ g \simeq id_{D^n}$ //

∘ より一般に $X \subset \mathbb{R}^n$ が凸集合ならば, X は可縮
(X が凸集合とは, $\forall x, y \in X$, $\forall t \in I$, $(1-t)x + ty \in X$ となること.
└ x と y を結ぶ線分上の点



宿題3 このことの証明を書き下せ.

∘ $f: S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ はホモトピー同値写像



(∵) $g: \mathbb{R}^n\setminus\{0\} \to S^{n-1}$ を $g(x) = \frac{1}{\|x\|}x$ とすると $g\circ f = id_{S^{n-1}}$
$H: I \times \mathbb{R}^n\setminus\{0\} \to \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ を $H(t,x) = (1-t)\frac{1}{\|x\|}x + tx$ とすると
$H(0,x) = \frac{1}{\|x\|}x$, $H(1,x) = x$ より $f\circ g \simeq id_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}$ //

宿題4 $K \subset \mathbb{R}^n$ を凸集合とするとき, $\mathbb{R}^n \setminus K$ は S^{n-1} とホモトピー同値であることを示せ.

• $\pi_0(X)$

∘ 位相空間 X が弧状連結とは
任意の $x, y \in X$ に対し, $l(0) = x$, $l(1) = y$ となる $l: I \to X$ が存在することであった.

∘ $x \in X$ のとき $C_X(x) = \{y \in X \mid \exists l: I \to X \text{ s.t. } l(0) = x, l(1) = y\}$ を
X の x を含む弧状連結成分という

- 任意の位相空間 X は弧状連結成分の直和になる.
つまり $x_\lambda \in X$ $(\lambda \in \Lambda)$ が存在して

$$X = \coprod_{\lambda\in\Lambda} C_X(x_\lambda)$$

(つまり $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} C_X(x_\lambda)$ かつ $\lambda \ne \mu$ なら $C_X(x_\lambda) \cap C_X(x_\mu) = \emptyset$)

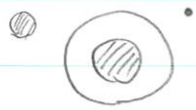
となる.

2024

都立大集中講義 1-4

つづき

- 例 $\mathbb{R}^2$

$X=$  は 4つの弧状連結成分からなる. //

この例では $\pi_0(X)$ は 4点集合

∘ (X, x_0)：基点付空間 のとき 各 $x \in X$ に対し $[x_0, x] \in \pi_0(X)$ が定まる.

($S^0 = \{x \in \mathbb{R}^1 \mid \|x\| = 1\} = \{-1, 1\}$ なので $f: S^0 \to X$ が $f(1) = x_0$, $f(-1) = x$ で定まる).

定理

$\pi_0(X)$ の元は X の弧状連結成分と 1対1に対応する.

つまり $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} C_X(x_\lambda)$ のとき $\Phi: \Lambda \to \pi_0(X)$ $(\lambda \mapsto [x_0, x_\lambda])$ は全単射 □

証明

逆の対応をつくる

各 $[x_0, x] \in \pi_0(X)$ に対し, $x \in C_X(x_\lambda)$ となる $\lambda \in \Lambda$ が唯一つ存在するので

$\Psi([x_0, x]) = \lambda \in \Lambda$ と定める. $(\Psi: \pi_0(X) \to \Lambda)$

well-definedness：$[x_0, x] = [x_0, y]$ のとき 対応する写像はホモトピックなので

x と y は同じ弧状連結成分に属する. ので OK.

$(\Psi \circ \Phi)(\lambda) = \Psi([x_0, x_\lambda]) = \lambda$ より $\Psi \circ \Phi = id_\Lambda$

$x \in C_X(x_\lambda)$ のとき $(\Phi \circ \Psi)([x_0, x]) = (\Phi \circ \Psi)([x_0, x_\lambda]) = \Phi(\lambda) = [x_0, x_\lambda]$ より $\Phi \circ \Psi = id_{\pi_0(X)}$

系

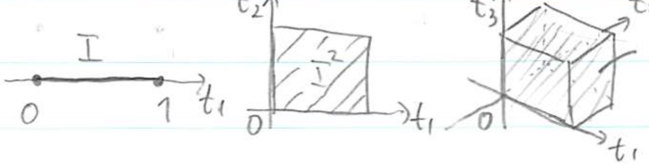
X が弧状連結 $\Longleftrightarrow$ $\pi_0(X)$ が 1点集合 □

• $\pi_i(X)$ の群構造 $(i \geq 1)$.

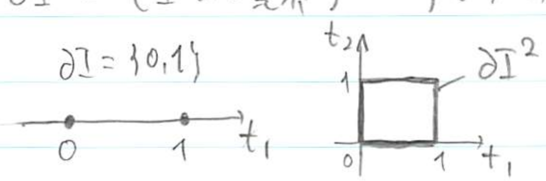
∘ 球面からの写像だと説明が難しくなるので I^n からの写像として説明する

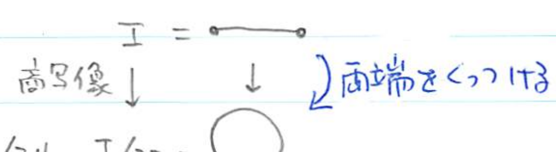
- $I^n = [0,1] \times \cdots \times [0,1]$ (n つの直積)：n次元立方体

$= \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall k, 0 \leq t_k \leq 1\}$



- $\partial I^n = (I^n$ の境界$) = \{(t_1, \ldots, t_n) \in I^n \mid \exists k \text{ s.t. } t_k = 0 \text{ or } 1\}$





- $I^n/\partial I^n$ は S^n と同相.

↑ ∂I^n の点を全て同一視して得られる商空間

⇝ S^n からの基点を保つ写像は I^n からの ∂I^n を基点に写す写像と同一視できる!

2024
都立大集中講義 1-5

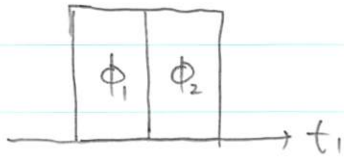
つづき

対の写像：$\phi_1(\partial I^n) \subset \{x_0\}$ をみたすということ

S^nからの基点を保つ写像の代わりにこのような写像を考えている！

○ $\phi_1, \phi_2 : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$ $(n \geq 1)$ に対し

$$\phi_1 + \phi_2 = \begin{cases} \phi_1(2t_1, t_2, \ldots, t_n) & (0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2}) \\ \phi_2(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n) & (\frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1) \end{cases}$$ と定める.



$\phi_1 + \phi_2$ もまた ∂I^n を x_0 に写す. (注："+" は可換ではない)

○先程の同一視で $\pi_n(X)$ は $(I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$ のホモトピー類と思うことができる.

(ホモトピー H は $H(I \times \partial I^n) = \{x_0\}$ をみたさねばならない)

これによって $[\phi_1], [\phi_2] \in \pi_n(X)$ に対し

$$[\phi_1] + [\phi_2] := [\phi_1 + \phi_2] \in \pi_n(X)$$

によって $\pi_n(X)$ に二項演算が定まる.

$\boxed{\text{宿題 5}}$ 実際にこれが well-defined であることの証明を書き下せ.

定理

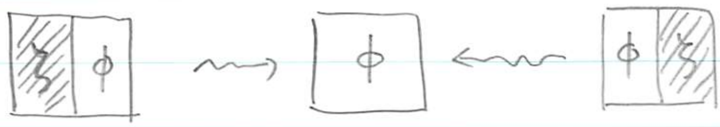
$\pi_n(X)$ はこの演算に関して群になる.

特に $n \geq 2$ のとき $\pi_n(X)$ は可換となる. □

証明の方針

$\xi : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$ を $\forall t \in I^n$, $\xi(t) = x_0$ (定値写像) とすると

$\forall [\phi] \in \pi_n(X)$ に対し $[\xi] + [\phi] = [\phi] + [\xi] = [\phi]$ となる(単位元).

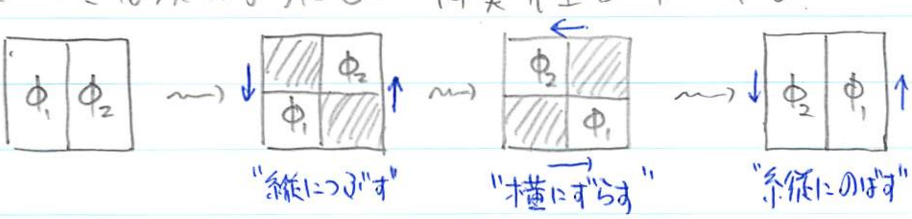


… ①

結合法則も成り立つ.

… ②

$n \geq 2$ のときは次のようにして可換性が示される



… ③

■

$\boxed{\text{宿題 6}}$ ①, ② のホモトピーを具体的に与えよ.

$\boxed{\text{宿題 7}}$ ③ の各ステップのホモトピーを具体的に与えよ.

次回：基本群