Arcsine and Darling–Kac laws for piecewise linear random interval maps

Kouji YANO (Kyoto University)

ランダムウォークに対して成立するレヴィの逆正弦法則と類似の結果は力学系に対しても成立することが知られている．本講演では，ある区分線形区間写像のランダム切り替えによるランダム力学系に対して逆正弦法則が成立することを報告する．本報告は，秦元仁氏の修士論文 [1] を元にした秦氏との共同研究 [2] に基づく．

逆正弦分布に従う確率変数を $\mathcal{A}$ と書く:

$$\mathbb{P}(\mathcal{A} \in \mathrm{d}u) = \frac{\mathrm{d}u}{\pi\sqrt{u(1-u)}} \quad \text{on } (0,1). \tag{1}$$

一次元単純対称ランダムウォーク $\{Z_n\}$ に対してレヴィの逆正弦法則

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1_{\{X_k>0\}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} \mathcal{A} \quad \text{on } \mathbb{R} \tag{2}$$

が成立する．有限区間の滞在割合がゼロに概収束することに注意すると，この主張は，次のようにも書き換えられる:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{X_k} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} \mathcal{A}\delta_{+\infty} + (1-\mathcal{A})\delta_{-\infty} \quad \text{on } \mathcal{P}[-\infty,\infty]. \tag{3}$$

但し，$[-\infty,\infty]$ は $\mathbb{R}$ の二点コンパクト化であり，$\mathcal{P}S$ は位相空間 S の上の確率測度全体に弱収束の位相を入れた空間を表す．同相写像 $\varphi : [-\infty,\infty] \to [0,1]$ を用いると，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{\varphi(X_k)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} \mathcal{A}\delta_1 + (1-\mathcal{A})\delta_0 \quad \text{on } \mathcal{P}[0,1]. \tag{4}$$

という形に上の主張を書き換えることができる．

Thaler [4] は**ブール変換**に対して逆正弦法則が成立することを示した．ブール変換とは，$Sx = x - 1/x$ で定まる変換 $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を言うが，変数変換 $\Phi : (0,1) \ni x \mapsto \frac{2x-1}{x(1-x)} \in \mathbb{R}$ によって変形された変換 $T : [0,1] \to [0,1]$ と同一視する:

$$Tx = \begin{cases} \frac{x(1-x)}{1-x-x^2} & (0 \le x < 1/2) \\ 1 - T(1-x) & (1/2 < x \le 1). \end{cases} \tag{5}$$

この変換は，不動点 $x = 0, 1$ の近傍を除くと拡大的であるが，不動点 $x = 0, 1$ においては微分が丁度 1 であるために，この点の付近に滞在する時間が支配的となる．一般に，微分が ± 1 となる不動点は**中立** (**neutral** あるいは **indifferent**) と呼ばれる．

定理 0.1 (Thaler [4]). 絶対連続な分布を持つ任意のランダム初期点 $\Theta \in [0,1]$ に対し，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{T^k\Theta} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} \mathcal{A}\delta_1 + (1-\mathcal{A})\delta_0 \quad \text{on } \mathcal{P}[0,1]. \tag{6}$$

この結果は，一般的な力学系に対する結果の特別な場合として示されており，さらに条件を緩和した一般論が得られている (関連文献は Sera [3] にまとめられている)．

ここで，次の二つの写像を考える:

$$\tau_1(x) = \begin{cases} x/2 & (0 \le x \le 1/2) \\ 2x-1 & (1/2 < x \le 1), \end{cases} \quad \tau_2(x) = \begin{cases} 2x & (0 \le x \le 1/2) \\ (x+1)/2 & (1/2 < x \le 1). \end{cases} \tag{7}$$

これら二つの写像は吸引的不動点を持つ:

$$\tau_1^n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \tau_2^n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{for } x \in [0,1] \text{ except } 0, 1/2, 1. \tag{8}$$

これら二つの写像を等確率で選択するランダム写像を考える:

$$T = \begin{cases} \tau_1 & (\text{with probability } 1/2), \\ \tau_2 & (\text{with probability } 1/2). \end{cases} \tag{9}$$

このランダム写像 T に対して，不動点 $x = 0, 1$ は次の意味で中立である:

$$\mathbb{E} \log |T'(0+)| = \mathbb{E} \log |T'(1-)| = 0. \tag{10}$$

ランダム写像 T の反復は次のように与えられる．$\{T_n\}_{n=1}^\infty$ を T の iid コピーとして

$$T^{(n)} = T_n \circ T_{n-1} \circ \cdots \circ T_1 \tag{11}$$

とおく．$T^{(n)}$ はランダム写像 T の n 回反復に相当する．

定理 0.2 (Hata–Y [2]). ランダム写像列 $\{T_n\}$ と独立で絶対連続な分布を持つ任意のランダム初期点 $\Theta \in [0,1]$ に対し，

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{T^{(k)}\Theta} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} \mathcal{A}\delta_1 + (1-\mathcal{A})\delta_0 \quad \text{on } \mathcal{P}[0,1]. \tag{12}$$

証明は，skew-product によって直積空間 $\{\tau_1, \tau_2\}^{\mathbb{N}} \times [0,1]$ 上の決定的力学系に帰着し，マルコフ分割を構成してマルコフ連鎖との conjugacy を示して，Thaler–Zweimüller [5] の定理を適用する．

References

[1] G. Hata. Arcsine law for a piecewise linear random map. *Master Thesis, Kyoto University*, 2019.

[2] G. Hata and K. Yano. Arcsine and darling–kac laws for piecewise linear random interval maps. 2021. Preprint, arXiv:2108.01332.

[3] T. Sera. Functional limit theorem for occupation time processes of intermittent maps. *Nonlinearity*, 33(3):1183–1217, 2020.

[4] M. Thaler. A limit theorem for sojourns near indifferent fixed points of one-dimensional maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 22(4):1289–1312, 2002.

[5] M. Thaler and R. Zweimüller. Distributional limit theorems in infinite ergodic theory. *Probab. Theory Related Fields*, 135(1):15–52, 2006.