Bessel 引越過程の構成と諸性質

簗島 瞬 (東京都立大学)
共同研究者：石谷 謙介 (東京都立大学)

1　概要

本講演では，時刻 1 で初めて所与の値に到達する δ 次元 Bessel 過程を，δ 次元 Bessel 引越過程とよび，その構成方法と諸性質を紹介する．

δ 次元 Bessel 過程は，1 次元拡散過程であり，δ が自然数のとき δ 次元 Brown 運動の原点からの距離とその法則が一致する．δ 次元 Bessel 過程については，これまで様々な研究がなされており，[1] では δ 次元 Bessel 橋の最大値分布の具体表示が得られており，[2] では δ 次元 Bessel 過程の first hitting time の分布の具体表示が得られている．

2　準備

以下では，$\delta > 0$ とし，$\nu := \delta/2 - 1$ とおく．$0 \leq a < b$ に対し，a 出発の δ 次元 Bessel 過程 $R^a = \{R^a(t)\}_{t\geq 0}$ の b への first hitting time を $\tau_{a,b}$ で表す：

$$\tau_{a,b} := \inf\{r \geq 0 \mid R^a(r) = b\}.$$

$0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$ に対し，区間 $[t_1, t_2]$ 上の連続関数の空間を $C([t_1, t_2], \mathbb{R})$，$[t_1, t_2]$ 上の a 出発かつ b 到達の δ 次元 Bessel 橋を $r^{a\to b}_{[t_1,t_2]} = \{r^{a\to b}_{[t_1,t_2]}(t)\}_{t\in[t_1,t_2]}$ で表す (なお，$t_1 = 0, t_2 = 1$ のとき $r^{a\to b}$ と略記する)．

$\eta > 0$ と $0 \leq s < t \leq 1$, $x, y \in [0, \eta]$ に対して，次の記号を定義する：

$$\begin{aligned}
q_1^{(\eta)}(s,x,t,y) :=& \frac{P\left(R^x(t-s) \in dy\right)}{dy} P\left(\max_{u\in[s,t]}(r^{x\to y}_{[s,t]}(u)) \leq \eta\right) \\
=& 2y\left(\frac{y}{x}\right)^{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_\nu\left(xj_{\nu,n}/\eta\right) J_\nu\left(yj_{\nu,n}/\eta\right)}{\eta^2 J_{\nu+1}^2(j_{\nu,n})} \exp\left(-\frac{j_{\nu,n}^2}{2\eta^2}(t-s)\right), \\
q_2^{(\eta)}(t,y) :=& \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\partial}{\partial\varepsilon} q_1^{(\eta+\varepsilon)}(0,y,t,\eta) = \frac{P\left(R^y(t) \in d\eta\right)}{d\eta} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\partial}{\partial\varepsilon} P\left(\max_{u\in[0,t]}(r^{y\to\eta}_{[0,t]}(u)) \leq \eta + \varepsilon\right) \\
=& 2\left(\frac{\eta}{y}\right)^{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_{\nu,n} J_\nu\left(yj_{\nu,n}/\eta\right)}{\eta^2 J_{\nu+1}(j_{\nu,n})} \exp\left(-\frac{j_{\nu,n}^2}{2\eta^2} t\right).
\end{aligned}$$

ただし，$J_\nu(z)$ は第 1 種 Bessel 関数，$0 < j_{\nu,1} < j_{\nu,2} < \cdots$ は $J_\nu(z)$ の零点である．

3　主結果

a 出発 $(a \geq 0)$ かつ時刻 1 で初めて b $(b > a)$ に到達する δ 次元 Bessel 過程を，以下では 2 通りの方法で構成する．まず，δ 次元 Bessel 過程の first hitting time を用いた定式化は次の通りである：

定理 1. $0 \le a < b$ とする．このとき，連続 Markov 過程 $H^{a\to b} = \{H^{a\to b}(t)\}_{t\in[0,1]}$ で，次をみたすものが存在する：$0 < s < t < 1$ と $x, y \in (0, b)$ に対し，

$$P\left(H^{a\to b}(t) \in dy\right) = P\left(R^a(t) \in dy \mid \tau_{a,b} = 1\right) = \frac{q_1^{(b)}(0,a,t,y)q_2^{(b)}(1-t,y)}{q_2^{(b)}(1,a)}dy,$$

$$\begin{aligned}P\left(H^{a\to b}(t) \in dy \mid H^{a\to b}(s) = x\right) &= P\left(R^a(t) \in dy \mid R^a(s) = x, \tau_{a,b} = 1\right)\\ &= \frac{q_1^{(b)}(s,x,t,y)q_2^{(b)}(1-t,y)}{q_2^{(b)}(1-s,x)}dy.\end{aligned}$$

$H^{a\to b} = \{H^{a\to b}(t)\}_{t\in[0,1]}$ を，a 出発かつ b 到達の δ **次元 Bessel 引越過程 (Bessel house-moving)** とよぶ．Bessel 引越過程は，条件付き Bessel 橋の弱収束極限としても構成可能であり，以下ではこのことを説明する．まず，$0 \le t_1 < t_2 \le 1$ に対して

$$K^-_{[t_1,t_2]}(b+\eta) := \{w \in C([t_1,t_2],\mathbb{R}) \mid w(t) \le b+\eta, t_1 \le t \le t_1\}$$

とおく．このとき，条件付き Bessel 橋の弱収束極限としての定式化は次の通りである：

定理 2. $0 \le a < b$ とする．このとき，

$$r^{a\to b}|_{K^-_{[0,1]}(b+\eta)} \xrightarrow{\mathcal{D}} H^{a\to b} \quad (\eta \downarrow 0)$$

が成り立つ．

なお，$\delta = 3$ の場合は，[3] において定理 2 が得られている．

以上で，δ 次元 Bessel 引越過程の 2 通りの構成方法を紹介した．最後に，Bessel 引越過程のパスの分解公式を紹介する．そのためにまず，$w_1 \in C([t_1,t],\mathbb{R})$ と $w_2 \in C([t,t_2],\mathbb{R})$ が $w_1(t) = w_2(t)$ をみたすとき，$w_1 \oplus_t w_2 \in C([t_1,t_2],\mathbb{R})$ を次式で定義する：

$$(w_1 \oplus_t w_2)(s) := \begin{cases} w_1(s), & s \in [t_1,t], \\ w_2(s), & s \in [t,t_2] \end{cases}.$$

このとき，Bessel 引越過程のパスの分解公式は次の通りである．

定理 3. $0 \le a < b$ とする．$C([0,1],\mathbb{R})$ 上の任意の有界連続関数 F に対し，次式

$$E\left[F(H^{a\to b})\right] = \int_0^b E\left[F(r^{a\to y}_{[0,t]}|_{K^-_{[0,t]}(b)} \oplus_t H^{y\to b}_{[t,1]}\right] P\left(H^{a\to b}(t) \in dy\right) \quad (0 < t < 1)$$

が成立する．ただし，$r^{a\to y}_{[0,t]}|_{K^-_{[0,t]}(b)}$ と $H^{y\to b}_{[t,1]}$ は独立であるとする．

なお，このパスの分解公式を証明するためには，定理 2 の構成方法が必要となる．

参考文献

[1] J. Pitman and M. Yor: *The law of the maximum of bessel bridge,* Electronic Journal of Probability **15** (1999), 1–35.

[2] Y. Hamana and H. Matsumoto: *The probability densities of the first hitting times of Bessel processes,* Trans. Amer. Math. Soc., **365** (2013), 5237–5257.

[3] D. Hatakenaka, K. Ishitani and K. Suzuki: *On the construction of Brownian house-moving and its properties,* preprint.

[4] D. Revuz and M. Yor: Continuous martingales and Brownian motion, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1999, 3rd ed.