Hitting times of rare events for a reaction–diffusion model

角田 謙吉 (Kenkichi TSUNODA)

Abstract

反応拡散模型は反応拡散方程式を統計力学的な模型から解析することを目的に [2] において導入された. 本講演では [6] の主結果を関連する結果とともに述べる.

$N \in \mathbb{N}$ をスケーリングパラメータとして $\mathbb{T}_N$ を 1 次元離散トーラス $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ とする. 状態空間を $X_N = \{0,1\}^{\mathbb{T}_N}$ により定義し, その元を配置とよび $\eta = \{\eta(x)\}_{x \in \mathbb{T}_N}$ と表す. 反応拡散模型は次の無限小生成作用素により定義される, X_N 上の Markov 過程 $\{\eta_t^N : t \geq 0\}$ のことである: X_N 上の実数値関数 f に対して,

$$L_N f(\eta) = N^2 \sum_{x \in \mathbb{T}_N} \{f(\eta^{x,x+1}) - f(\eta)\} + \sum_{x \in \mathbb{T}_N} c(\tau_x \eta)\{f(\eta^x) - f(\eta)\}.$$

ここで c は $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ 上の正値局所関数である (N が大きければ X_N 上の関数とみなせる). また $\{\tau_x : x \in \mathbb{T}_N\}$ は X_N に作用する平行移動群であり, $\eta^{x,y}, \eta^x$ はそれぞれ次で定義される配置である:

$$\eta^{x,y}(z) = \begin{cases} \eta(y), & \text{if } z = x, \\ \eta(x), & \text{if } z = y, \\ \eta(z), & \text{if } z \neq x, y. \end{cases} \qquad \eta^x(z) = \begin{cases} 1 - \eta(x), & \text{if } z = x, \\ \eta(z), & \text{if } z \neq x. \end{cases}$$

続いて $\mathbb{T}$ を 1 次元連続トーラス $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ とし, $\eta \in X_N$ から決まる経験分布を次で定義する:

$$\pi^N(\eta) = \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} \eta(x) \delta_{x/N}.$$

ここで $u \in \mathbb{T}$ に対して δ_u は u に集中する Dirac 測度である. また $t \geq 0$ に対して $\pi_t^N = \pi^N(\eta_t^N)$ とおく.

経験分布過程 π_t^N に対する大数の法則 (流体力学極限) は [2] において示された. 初めにこの結果を紹介する. $0 \leq \rho \leq 1$ に対して ν_ρ を $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ 上の直積 Bernoulli 測度とし, $F(\rho) = \int c(\eta)(1 - 2\eta(0))\nu(d\eta)$ とする. このとき, π_0^N が $N \to \infty$ で $\rho_0(u)du$(du は $\mathbb{T}$ 上の Lebesgue 測度) に確率収束するならば, 任意の $t \geq 0$ に対して π_t^N が $N \to \infty$ で $\rho(t,u)du$ に確率収束する. ここで $\rho : [0,\infty) \times \mathbb{T}^d \to [0,1]$ は次の反応拡散方程式の解である:

$$\begin{cases} \partial_t \rho = \Delta \rho + F(\rho), \\ \rho(0,\cdot) = \rho_0(\cdot). \end{cases}$$

大阪大学大学院理学研究科数学専攻 e-mail: k-tsunoda@math.sci.osaka-u.ac.jp

Glauber part の飛躍率は正と仮定したので, Markov 過程 $\{\eta_t^N : t \geq 0\}$ は既約になりよく知られているように唯一の不変確率測度 μ_N をもつ．講演者の研究 [4] において定常状態 μ_N に対する大数の法則 (流体静力学) が示された．次にこれを紹介する．以降 F は唯一の零点 $\rho_* \in (0,1)$ をもつことを仮定する．$\mathcal{M}_+$ を $\mathbb{T}$ 上の全測度が 1 以下の集合とし弱位相を備えさせる．弱位相は適当な距離に対して距離化可能であるので, そのような距離 d を一つ固定する．このとき任意の $\delta > 0$ に対して次が成立する．

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N \left(\eta : d(\pi^N(\eta), \rho_* du) \geq \delta\right) = 0.$$

この結果から $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}_+, \rho_* du \notin \overline{\mathcal{O}}$ なるものは

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N \left(\eta : \pi^N(\eta) \in \mathcal{O}\right) = 0,$$

を満たす．このため Markov 過程 $\{\eta_t^N : t \geq 0\}$ が $(\pi^N)^{-1}(\mathcal{O})$ に到達するという事象は “rare event” と考えられる．この到達時刻を $H_N^{\mathcal{O}}$ とすると, [6] の主結果は以下になる．

Theorem 0.1. 飛躍率 c 及び初期分布に関する適切な仮定の下で, $N \to \infty$ において正規化した到達時刻 $H_N^{\mathcal{O}}/\mathbb{E}_{\mu_N}[H_N^{\mathcal{O}}]$ は平均 1 の指数分布に分布収束する．

Theorem 0.1 を示すために [1] による一般論, 流体力学極限に対する大偏差原理 [4], 流体静力学に対する大偏差原理 [3] 及び混合時間の評価 [5] を用いる．本講演では主結果の正確な仮定を述べるとともにこれらの結果についても紹介する．

References

[1] O. Benois, C. Landim and M. Mourragui, *Hitting times of rare events in Markov chains*, J. Stat. Phys., **153**, 967–990 (2013).

[2] A. De Masi, P. Ferrari and J. Lebowitz, *Reaction diffusion equations for interacting particle systems*, J. Statist. Phys., **44**, 589–644 (1986).

[3] J. Farfan, C. Landim and K. Tsunoda, *Static large deviations for a reaction-diffusion model*, Probab. Theory Relat. Fields, **174**, 49–101 (2019).

[4] C. Landim and K. Tsunoda, *Hydrostatics and large deviations for a reaction-diffusion model*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., **54**, 51–74 (2018).

[5] R. Tanaka and K. Tsunoda, *Glauber-Exclusion dynamics: rapid mixing regime*. available at arXiv:2011.13158

[6] K. Tsunoda, *Exponentially slow mixing and hitting times of rare events for a reaction–diffusion model*. available at arXiv:2105.12965