Local time penalizations with various clocks for Lévy processes

武田 翔成（京都大学理学研究科）
矢野 孝次 氏（京都大学理学研究科）との共同研究

$(X, \mathbb{P}_x)$ を $X_0 = x$ となる 1 次元 Lévy 過程とし，$(\mathcal{F}_t)$ をそのフィルトレーションとする．さらに L を 0 における局所時間 (local time) とする．この下で，以下のような極限の問題を考える．これを局所時間の**処罰問題 (penalization problem)** という：

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{\mathbb{P}_x[F_t f(L_\tau)]}{\mathbb{P}_x[f(L_\tau)]} = \mathbb{Q}_x[F_t]. \tag{0.1}$$

ただし，$\mathbb{Q}_x$ は極限で得られる確率測度，$\mathbb{P}_x[\cdot], \mathbb{Q}_x[\cdot]$ は期待値の意味であり，F_t は $\mathcal{F}_t$-可測な有界汎関数，f は $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ となる非負関数である（以下これを $f \in \mathcal{L}^1_+$ とあらわす）．さらに τ は ∞ に発散するランダム時刻の有向族である．これを**時計 (clock)** という．

定数時計に対する処罰問題の研究は，ブラウン運動に対して Roynette–Vallois–Yor [2, 3] にはじまり，対称安定過程に対して Yano–Yano–Yor [5] で調べられた．Profeta–Yano–Yano [1] は 1 次元拡散過程に対し，ランダム時計の処罰問題を調べた．本講演では，論文 [4] に基づき，非対称な 1 次元 Lévy 過程に対して，ランダム時計の局所時間処罰問題の結果を紹介する．

特性関数の指数 $\Psi(\lambda)$ を $\mathbb{P}_0[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda X_t}] = \mathrm{e}^{-t\Psi(\lambda)}$ で定義する．このとき，定数 $v \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ と $\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2)\nu(\mathrm{d}x) < \infty$ をみたす $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上の Lévy 測度 ν が存在して，

$$\Psi(\lambda) = iv\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} + i\lambda x 1_{|x|<1})\nu(\mathrm{d}x) \tag{0.2}$$

と表せる．本講演では，常に以下を仮定する．

仮定. X は再帰的 (recurrent) であり，かつ任意の $q > 0$ に対して，

$$\int_0^\infty \left| \frac{1}{q + \Psi(\lambda)} \right| \mathrm{d}\lambda < \infty \tag{0.3}$$

が成立する．

このとき，q-レゾルベント密度 $r_q(x)$ が存在し，

$$r_q(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}}{q + \Psi(\lambda)} \right) \mathrm{d}\lambda. \tag{0.4}$$

となることが知られている．$h_q(x) = r_q(0) - r_q(-x)$ と定義すると，以下が成立する．

定理 1. $h(x) \coloneqq \lim_{q \to 0+} h_q(x)$ は $x \in \mathbb{R}$ で存在して有限値.

次の記号を定義する：

$$m^2 = \mathbb{P}[X_1^2] = \sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} x^2 \nu(\mathrm{d}x) \in (0, \infty], \tag{0.5}$$

$$h^{(\gamma)}(x) = h(x) + \frac{\gamma}{m^2} x, \tag{0.6}$$

$$M_t^{(\gamma, f)} = h^{(\gamma)}(X_t) f(L_t) + \int_0^\infty f(L_t + u)\,\mathrm{d}u. \tag{0.7}$$

ただし $-1 \le \gamma \le 1$，$f \in \mathcal{L}^1_+$ とする．$m^2 = \infty$ のときは，γ による違いが生じないことに注意する．このとき，$h^{(\gamma)} \ge 0$ であり，$M_t^{(\gamma,f)}$ は非負のマルチンゲールとなることが示せる．

ここでは，ランダム時計を指数時計・到達時計・2 点到達時計にしたときの，処罰問題の結果を述べる．

定理 2 (指数時計による結果)**.** $\boldsymbol{e}_q$ を平均 $1/q$ の独立な指数分布，$f \in \mathcal{L}^1_+$ とすると，

$$M_t^q \coloneqq r_q(0)\mathbb{P}_x[f(L_{\boldsymbol{e}_q})|\mathcal{F}_t] \xrightarrow{q\to 0+} M_t^{(0,f)} \tag{0.8}$$

が $\mathbb{P}_x$-a.s. かつ $\mathcal{L}^1(\mathbb{P}_x)$ で成立する．

これにより処罰問題の結果が得られる．実際，$\mathbb{P}_x(M_0^{(0,f)} > 0) = 1$ とすると，$\mathcal{F}_t$-可測な有界汎関数 F_t に対して，

$$\lim_{q\to 0+} \frac{\mathbb{P}_x[F_t f(L_{\boldsymbol{e}_q})]}{\mathbb{P}_x[f(L_{\boldsymbol{e}_q})]} = \mathbb{P}_x\left[F_t \frac{M_t^{(0,f)}}{M_0^{(0,f)}}\right] \tag{0.9}$$

が成立するからである．以下についても同じであるから，この形で述べるのは省略する．

定理 3 (到達時計による結果)**.** $T_a = \inf\{t > 0\colon X_t = a\}$，$h^B(a) = \mathbb{P}_0[L_{T_a}]$ とする．このとき，

$$M_t^a \coloneqq h^B(a)\mathbb{P}_x[f(L_{T_a})|\mathcal{F}_t] \xrightarrow{a\to\pm\infty} M_t^{(\pm 1,f)} \tag{0.10}$$

が $\mathbb{P}_x$-a.s. かつ $\mathcal{L}^1(\mathbb{P}_x)$ で成立する．

定理 4 (2 点到達時計による結果)**.** $T_{a,b} = T_a \wedge T_b$ とする．さらに，$0 < p < 1$，$q = 1 - p$，$\gamma = p - q$，$h^C(a,b) = \mathbb{P}[L_{T_{a,b}}]$ とする．このとき，

$$M_t^{p,a} \coloneqq h^C(pa,-qa)\mathbb{P}_x[f(L_{pa,-qa})|\mathcal{F}_t] \xrightarrow{a\to\infty} M_t^{(\gamma,f)} \tag{0.11}$$

が $\mathbb{P}_x$-a.s. かつ $\mathcal{L}^1(\mathbb{P}_x)$ で成立する．

これらの定理から，$m^2 < \infty$ のときは，ランダム時計の選び方によって，極限の確率測度が異なるのが分かる．

参考文献

[1] C. Profeta, K. Yano, and Y. Yano. Local time penalizations with various clocks for one-dimensional diffusions. *J. Math. Soc. Japan*, 71(1):203–233, 2019.

[2] B. Roynette, P. Vallois, and M. Yor. Limiting laws associated with Brownian motion perturbed by its maximum, minimum and local time. II. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 43(3):295–360, 2006.

[3] B. Roynette and M. Yor. *Penalising Brownian paths*, volume 1969 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[4] S. Takeda and K. Yano. Local time penalizations with various clocks for Lévy processes. In preparation, 2021.

[5] K. Yano, Y. Yano, and M. Yor. Penalising symmetric stable Lévy paths. *J. Math. Soc. Japan*, 61(3):757–798, 2009.