Some relation between spectral dimension and Ahlfors regular conformal dimension of resistance metrics

笹谷 晃平　(京都大学 D2)

本講演では Sierpiński Carpet (以下, SC) や Sierpiński Gasket (以下, SG) などのフラクタルを含む枠組である抵抗形式の範疇において, Ahlfors regular conformal dimension (以下, ARC 次元) とスペクトル次元の関係について述べる.
距離空間の ARC 次元は, 以下のように quasisymmetry 及び Ahlfors regularity によって定義される.

定義 1 (quasisymmetry)**.** 集合 X 上の距離 d, ρ が quasisymmetric であるとは, ある同相写像 $\theta : [0, \infty) \to [0, \infty)$ があって, $x \neq z$ なる任意の x, y, z に対して

$$\theta\big(d(x,y)/d(x,z)\big) \geq (\rho(x,y)/\rho(x,z))$$

となることである. このとき, $d \underset{\mathrm{QS}}{\sim} \rho$ と書く.

注意. $d \underset{\mathrm{QS}}{\sim} \rho$ のとき両距離が X 上に導く位相は同相であり, また $\underset{\mathrm{QS}}{\sim}$ は X 上の距離の同値関係を導く.

定義 2 (α-Ahlfors regular)**.** 距離空間 (X, d) 及び $\alpha > 0$ に対し, ある Borel 測度 μ 及び定数 $C > 0$ があって, 任意の $x \in X$ 及び $r \in [\inf_{y:y\neq x} d(x,y), diam(X,d)]$ に対して $C^{-1}r^{\alpha} \leq \mu(B_d(x,r)) \leq Cr^{\alpha}$ を満たすとき, (X, d) は α-Ahlfors regular (以下,α-AR) であるという.

定義 3 (ARC 次元)**.** 距離空間 (X, d) の ARC 次元を以下で定める. (ただし, $\inf \emptyset = \infty$.)

$$\dim_{\mathrm{AR}}(X,d) = \inf\{\alpha \mid d \underset{\mathrm{QS}}{\sim} \rho \text{ かつ } \rho : \alpha\text{-AR なる } X \text{ 上の距離 } \rho \text{ が存在 }\}$$

(X, d) に孤立点がないなら, $\dim_{\mathrm{AR}}(X.d) = \inf\{\dim_{\mathrm{H}}(X,\rho) \mid \rho : \rho \underset{\mathrm{QS}}{\sim} d$ かつ, ある $\alpha > 0$ に対し α-AR $\}$ とも表せる.
木上 [2] は, 孤立点を持たないコンパクト距離空間に性質のよい段階的な細分構造が入っているとき, その隣接構造から定まるグラフ上の p 次エネルギー ($p > 0$) の変分問題から定まるある種の臨界値として, その距離空間の ARC 次元が表されることを示した. (即ち,ARC 次元に 1 つの解析的な特徴付を与えた.) さらにこの特徴付けを用いて, 以下の不等式を示した.

定理 4 ([2], Theorem 4.7.9)**.** *X:SG または (generalized) SC, d:* ユークリッド距離の制限のとき

$$\dim_{\mathrm{AR}}(X,d) \leq d_S(X,d) < 2 \text{ または } \dim_{\mathrm{AR}}(X,d) \geq d_S(X,d) \geq 2 \tag{1}$$

のいずれか一方が成り立つ.

ただし, ここで $d_S(X, d)$ は (X, d) のスペクトル次元, 即ち (X, d) 上のブラウン運動の (あるいは, 標準ラプラシアンの) 熱核 $p(t, x, x)$ に対し, $\lim_{t\to 0} -2\log(p(t,x,x))/\log t$ で表される量である.
講演者は, 式 (1) の関係がどのような範囲の距離空間及び対応する標準的な確率過程に対して成立するか, 研究を行ってきた. 本講演では, 抵抗形式の入った距離空間を考える. 集合 X 上の抵抗形式とは, 大まかに言えば X 上の実関数の部分線形空間 $\mathcal{F}$ と, その上の半正定値対称 2 次形式 $\mathcal{E}$ の組 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ であって, Markov 性を持ち, かつ $x \neq y$ なる任意の $x, y \in X$ に対し条件

$$R(x,y) := (\min\{\mathcal{E}(f,f) \mid u \in \mathcal{F},\ u(x) = 1,\ u(y) = 0\})^{-1} \text{ が存在し } 0 < R(x,y) < \infty$$

を満たすようなものである．$R(x,y)$ は X 上の距離となることが知られており, 抵抗形式に付随する抵抗距離と呼ばれる．また定義の類似性から想像される通り, $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が一定の条件を満たすとき, 任意の $x \in X$ 及び $r > 0$ に対し $0 < \mu(B_d(x,r)) < \infty$ を満たすような (X,R) の Borel 測度 μ に対して, $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は $L^2(X,\mu)$ 上の正則 Dirichlet 形式となる．これらの結果及び付随する Dirichlet 形式の熱核評価については [1] に纏められている．例として, SG や generalized SC のうち強局所的なものについては, 対応するブラウン運動の Dirichelet 形式はこの枠組に含まれる．
主結果について述べるため, 一様完全性と doubling 条件を導入する．(X,d) を距離空間とする．

定義 5 (一様完全性)**.** (X,d) が一様完全であるとは, ある $\gamma > 1$ があって, 任意の $x \in X$, $r > 0$ であって $B_d(x,r) \neq X$ なるようなものに対し $B_d(x,\gamma r) \setminus B_d(x,r) \neq \emptyset$ なることである．

定義 6 (doubling condition)**.** ある $N \geq 1$ があって， 任意の $x \in X$, $r > 0$ に対し, ある $x_i \in X (1 \leq i \leq N)$ があって $B_d(x,2r) \subset \cup_{1\leq i\leq N} B_d(x,r)$ なるとき (X,d) は doubling であるという．

(X,d) が一様完全かつ doubling (resp. 完備) であって, X 上の距離 ρ に対し $d \underset{\mathrm{QS}}{\sim} \rho$ であれば, (X,ρ) もまた一様完全かつ doubling (resp. 完備) である．またこのことから, 孤立点を持たない距離空間 (X,d) について,$\dim_{\mathrm{AR}}(X,d) < \infty$ を満たすなら, 一様完全かつ doubling であることが従う．
以下, (X,d) は完備, 一様完全, doubling な距離空間とし, $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を X 上の抵抗形式であって抵抗距離 R が $d \underset{\mathrm{QS}}{\sim} R$ を満たすようなものとする．さらに μ を (X,d) 上の Borel 正則測度で, 任意の $x \in X$ 及び $r > 0$ に対し $0 < \mu(B_d(x,r)) < \infty$ を満たすようなものとする．このとき [1] の結果より, $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は $L^2(X,\mu)$ 上の正則 Dirichlet 形式となり, 対応する区分的に連続な熱核 $p(t,x,y)$ が存在する．本講演の主結果は以下の通りである．

定理 7. 極限

$$\overline{d_S} = 2 \lim_{t\to\infty} \sup_{x\in X, s\in(0,\mathrm{diam}(X,d)]} \frac{\log p(s/t,x,x) - \log p(s,x,x)}{\log t}$$

が存在し*,* $\dim_{\mathrm{AR}}(X,d) \leq \overline{d_S} < 2$ *が成り立つ.*

SC や SG 上のブラウン運動の場合 $\overline{d_S}$ は d_S と一致するが, 一般の場合にはこの 2 つの量は異なる．実際, d_S については期待される不等式の反例が以下のように存在する．

定理 8 ([3], Theorem1.5 の連続版)**.** 上記の仮定を満たすある (X,d)*,* $(\mathcal{E},\mathcal{F})$*,* μ であって*,* $d_S = \lim_{t\to 0} -2\log(p(t,x,x))/\log t$ が x によらないような極限として存在し、かつ $d_S < \dim_{\mathrm{AR}}(X,d) < 2$ なるようなものが存在する*.*

参考文献

[1] J. Kigami, Resistance forms, quasisymmetric maps and heat kernel estimates. *Mem. Amer. Math. Soc.* **216** (2012), no. 1015.

[2] J. Kigami, *Geometry and analysis of metric spaces via weighted partitions.* Lecture Notes in Mathematics, 2265. Springer, Cham, 2020.

[3] K. sasaya, *Some relation between spectral dimension and Ahlfors regular conformal dimension on infinite graphs.* preprint, 2021, https://arxiv.org/abs/2109.00851