Spectral dimension of simple random walk on a long-range percolation cluster

熊谷　隆　（京都大学数理解析研究所）

Joint work with V.H. Can (National Univ. of Singapore) and D.A. Croydon (RIMS)

https://arxiv.org/abs/2111.00718

ランダムなグラフ上のランダムウォークのスペクトル次元の解析は、ガウス型の場合の他、ランダムウォークに強い再帰性がある場合に研究が進んでいる（cf. [3]）。本講演では、[5] に触発された、ランダムグラフ上のランダムウォークの熱核の on-digagonal lower bound の一般論および、long-range percolation 上のランダムウォークの熱核評価への応用に関する最近の研究結果を報告する。

1. Long-range percolation 上のランダムウォークの熱核評価

$\mathbb{Z}^d$ 上の long-range percolation で、nearest-neighbour edges は繋がっているものを考える。すなわち、$q_{x,y}$ を $x, y \in \mathbb{Z}^d$ が（重み 1 のコンダクタンスで）繋がっている確率とし、

$$q_{x,y} = 1 \text{ if } |x-y| = 1, \qquad c_1|x-y|^{-s} \le q_{x,y} \le c_2|x-y|^{-s} \text{ if } |x-y| > 1$$

とする（ただし $s > d$）。[注意：所謂 long-range percolation は $q_{x,y} = 1 - \exp(-|x-y|^{-s})$ であるが、我々の結果は上の仮定のもとで成り立つ。] このモデルを以下では $\mathrm{LRP}(d,s)$ と記し、媒質のランダムネスを $\mathbf{P}$、その平均を $\mathbf{E}$ で表す。

$(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ を $\mathrm{LRP}(d,s)$ 上の単純ランダムウォークとし、その熱核を以下で定める。

$$p_t^G(x,y) := \frac{P_x^G(X_t = y)}{\deg_G(y)}, \qquad \forall x, y \in \mathbb{Z}^d,\ t \in \mathbb{N}.$$

ここで、P_x^G は $X_0 = x$ とした X の quenched law で、$\deg_G(y)$ は y と繋がるボンドの数とする。

Theorem 1 (Quenched bounds)
(a) $d \ge 1,\ s \in (d, \min\{d+2, 2d\})$ の時、$\mathbf{P}$-*a.s.* で十分大きい $t \in \mathbb{N}$ について以下が成り立つ。

$$c_1 t^{-\frac{d}{s-d}} (\log t)^{-\delta_1} \le p_{2t}^G(\rho,\rho) \le c_2 t^{-\frac{d}{s-d}} (\log t)^{\delta_2}.$$

(b) $d = 1,\ s > 2$ の時、$\mathbf{P}$-*a.s.* で十分大きい $t \in \mathbb{N}$ について以下が成り立つ。

$$c_3 t^{-\frac{1}{2}} \le p_{2t}^G(\rho,\rho) \le c_4 t^{-\frac{1}{2}}.$$

（上からの評価は、$d = 1,\ s = 2$ でも成り立つ。）
(c) $d \ge 2,\ s \ge d+2$ の時、$\mathbf{P}$-*a.s.* で十分大きい $t \in \mathbb{N}$ について以下が成り立つ。

$$c_5 t^{-\frac{d}{2}} (\log t)^{-\delta_3} \le p_{2t}^G(\rho,\rho) \le c_6 t^{-\frac{d}{2}} (\log t)^{\delta_4}.$$

Theorem 2 (Annealed bounds)
(a) $d \ge 1,\ s \in (d, \min\{d+2, 2d\})$ の時、十分大きい $t \in \mathbb{N}$ について以下が成り立つ。

$$c_1 t^{-\frac{d}{s-d}} \le \mathbf{E}\left(p_{2t}^G(\rho,\rho)\right) \le c_2 t^{-\frac{d}{s-d}} (\log t)^{\delta_2}.$$

(b) $d \ge 2,\ s = d+2$ の時、十分大きい $t \in \mathbb{N}$ について以下が成り立つ。

$$c_3 t^{-\frac{d}{2}} (\log t)^{-\delta_5} \le \mathbf{E}\left(p_{2t}^G(\rho,\rho)\right) \le c_4 t^{-\frac{d}{2}}.$$

(c) $d \ge 1,\ s > \min\{d+2, 2d\}$ の時、十分大きい $t \in \mathbb{N}$ について以下が成り立つ。

$$c_5 t^{-\frac{d}{2}} \le \mathbf{E}\left(p_{2t}^G(\rho,\rho)\right) \le c_6 t^{-\frac{d}{2}}.$$

（上からの評価は、$d = 1,\ s = 2$ でも成り立つ。）

これらの定理の評価の一部（特に上からの評価の多く）は、すでに [1, 2, 4] 等の先行研究で得られている。また、一部は nearest-neighbour edges が繋がっているという仮定を置かずに証明できる。詳しくは講演で説明する。

以下の極限が存在する時、それぞれ quenched, annealed のスペクトル次元と呼ぶ。

$$d_s^{(q)}(d,s) := -\lim_{t\to\infty}\frac{2\log p_{2t}^G(\rho,\rho)}{\log t},\ \mathbf{P}-\text{a.s.},\qquad d_s^{(a)}(d,s) := -\lim_{t\to\infty}\frac{2\log \mathbf{E}\left(p_{2t}^G(\rho,\rho)\right)}{\log t}.$$

Corollary 1 (Quenched and annealed spectral dimension)
(a) $d\ge 1,\ s\in(d,\min\{d+2,2d\})$ の時、 $\mathbf{P}$-*a.s.* で以下が成り立つ。

$$d_s^{(a)}(d,s) = d_s^{(q)}(d,s) = \frac{2d}{s-d}.$$

(b) $d\ge 1,\ s>\min\{d+2,2d\}$ または $d\ge 2,\ s=d+2$ の時、 $\mathbf{P}$-*a.s.* で以下が成り立つ。

$$d_s^{(a)}(d,s) = d_s^{(q)}(d,s) = d.$$

• $d=1, s=2$ のところでスペクトル次元が不連続になっていることが分かるが、そこでのスペクトル次元は（極限の存在も含めて）分かっていない。

2. 熱核の on-diagonal lower bound

G を局所有限連結なランダムグラフ、$\rho\in G$ とし、ランダムな有限連結グラフの列 (G_n,ρ_n) が (G,ρ) に Benjamini-Schramm 収束するとする。[すなわち、ρ_n は G_n の頂点から uniform に取り、任意の $k\ge 1$ について G_n 内の ρ_n 中心半径 k の球が G 内の ρ 中心半径 k の球に分布収束するとする。] $G=(V,E), G_n=(V_n,E_n)$ とおき、π_n を G_n 上の単純ランダムウォークの定常分布、$\pi_n^\star(\varepsilon)=\max\{\pi_n(W):|W|\le\varepsilon|V_n|\}$ とする。

(A1) $\alpha>0$ が存在して任意の $n\in\mathbb{N}$ について $\mathbb{E}\left(\frac{|E_n|^2}{|V_n|^2}\right)\le\alpha$ が成り立つ。

(A2) 任意の $\varepsilon>0$ に対し、n が十分大きければ $\mathbb{E}\left(\pi_n^\star(\varepsilon)^2\right)\le\alpha\varepsilon$ が成り立つ。

(A3) $\delta_0,\cdots,\delta_3,\gamma>0$ と $\lambda:(0,\infty)\to[1,\infty)$ が存在して、以下が成り立つ。任意の $t\in\mathbb{N}$ について、$n_0=n_0(t)\in\mathbb{N}$ が存在し、$n\ge n_0$ について $1-\lambda(t)^{-\delta_0}$ 以上の確率で disjoint な $(\Omega_i)_{i=1}^k\subset V_n$ と $A_k\subset\Omega_k$ が存在して以下を満たす： (a) $\max_{i=1,\dots,k}|\Omega_i|\le\alpha t^\gamma\lambda(t)^{\delta_1}$, (b) $\sum_{i=1}^k\pi_n(A_i)\ge 1-\alpha\lambda(t)^{-\delta_2}$, (c) $\sum_{i=1}^k\mathrm{cap}_{\Omega_i}(A_i)\le 2\alpha|E_n|t^{-1}\lambda(t)^{-\delta_3}$.

Proposition 1 *(A1),(A2), (A3)* を仮定する。
(a) $\sum_{i=1}^\infty\lambda(e^i)^{-\frac{\delta_0\wedge\delta_2\wedge\delta_3}{2}}<\infty$ とし、 $c_1\le\lambda(t)/\lambda(e^{i+1})$ *for all* $e^i\le t\le e^{i+1}$ *and all* $i\in\mathbb{N}$ とする。この時、$\mathbf{P}$-*a.s.* で十分大きい $t\in\mathbb{N}$ について以下が成り立つ。

$$p_{2t}^G(\rho,\rho)\ge\frac{c_2}{t^\gamma\lambda(t)^{\delta_1+2(\delta_2\wedge\delta_3)}}.$$

(b) $\lambda(t)=\lambda_0,\ 1-C_\alpha\lambda_0^{-\frac{\delta_0\wedge\delta_2\wedge\delta_3}{2}}>0$ とする。この時、$c(\alpha,\lambda_0)>0$ が存在して以下が成り立つ。

$$\mathbf{E}\left(p_{2t}^G(\rho,\rho)\right)\ge\frac{c(\alpha,\lambda_0)}{t^\gamma},\qquad\forall t\in\mathbb{N}.$$

References

[1] M. Biskup, X. Chen, T. Kumagai and J. Wang: *PTRF* **180** (2021), 847–889.

[2] N. Crawford and A. Sly: I. *PTRF* **154** (2012), 753–786, II. *AOP* **41** (2013), 445–502.

[3] T. Kumagai: Lect. Notes in Math. **2101**, Springer, (2014).

[4] T. Kumagai and J. Misumi: *J. Theoret. Probab.* **21** (2008), 910–935.

[5] J.R. Lee: Preprint available at arXiv:1701.01598, 2017.