Brown 引越過程の構成と諸性質

石谷 謙介 (東京都立大学)

1 概要

本講演では，出発点と到達点の間に留まる 1 次元 Brown 橋を，Brown 引越過程とよび，その構成方法と諸性質を紹介する．

条件付き確率過程の弱収束については，これまで様々な研究がなされている．例えば，Durrett, Igrehart and Miller [3] では，0 出発の 1 次元標準 Brown 運動を正に条件付けると Brownian meander に弱収束すること，および 0 出発で 0 到達の 1 次元 Brown 橋を正に条件付けると Brownian excursion に弱収束すること等が示されている．

2 準備

$s > 0$ に対し，$n_s(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(-\frac{x^2}{2s}\right)$ とおく．また，$\eta > 0$ と $r > 0$ および $t > s > 0$ に対し，次の記号を定義する：

$$J_1^{(\eta)}(r,z) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2(z+2k\eta)}{r} n_r(z+2k\eta), \quad J_2^{(\eta)}(r,z) := J_1^{(\eta)}(r, \eta - z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2(\eta - z + 2k\eta)}{r} n_r(\eta - z + 2k\eta),$$

$$J_3^{(\eta)}(s,x,t,y) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(n_{t-s}(y-x+2k\eta) - n_{t-s}(y+x+2k\eta)\right),$$

$$J_4^{(\eta)}(r,z) := \frac{\partial}{\partial \eta} J_1^{(\eta)}(r,z) = 4 \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \left(\frac{1}{r} - \frac{(z+2k\eta)^2}{r^2}\right) n_r(z+2k\eta),$$

$$J^{(\eta)}(z) := J_4^{(\eta)}(1,z) = 4 \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \left(1 - (z+2k\eta)^2\right) n_1(z+2k\eta).$$

3 主結果

以下では，$b > 0$ とする．まず，出発点 0 と到達点 b の間に留まる 1 次元 Brown 橋を，条件付き Brown 橋の弱収束極限として構成すると次の通りである：

定理 1. $B^{0\to b}|_{K(-\varepsilon,b+\varepsilon)} = \{B^{0\to b}|_{K(-\varepsilon,b+\varepsilon)}(t)\}_{t\in[0,1]}$ は，$[-\varepsilon, b+\varepsilon]$ に値をとるように条件付けられた $[0,1]$ 上の 0 出発 b 到達の 1 次元 *Brown* 橋とする．このとき，$[0,b]$ に値をとる連続 Markov 過程 $H^{0\to b} = \{H^{0\to b}(t)\}_{t\in[0,1]}$ で，

$$B^{0\to b}|_{K(-\varepsilon,b+\varepsilon)} \xrightarrow{\mathcal{D}} H^{0\to b}, \quad (\varepsilon \downarrow 0)$$

をみたすものが存在し，推移密度関数は次で与えられる：$0 < s < t < 1$ と $x, y \in (0,b)$ に対し，

$$P\left(H^{0\to b}(t) \in dy\right) = \frac{J_1^{(b)}(t,y)\, J_2^{(b)}(1-t,y)}{J^{(b)}(b)} dy,$$

$$P\left(H^{0\to b}(t) \in dy \mid H^{0\to b}(s) = x\right) = \frac{J_2^{(b)}(1-t,y)\, J_3^{(b)}(s,x,t,y)}{J_2^{(b)}(1-s,x)} dy.$$

この $H^{0\to b} = \{H^{0\to b}(t)\}_{t\in[0,1]}$ を，0 出発 b 到達の Brown 引越過程 (Brownian house-moving) とよぶ．次に，Brown 引越過程は，条件付き 3 次元 Bessel 橋の弱収束極限としても構成可能であり，その構成方法は次の通りである：

定理 2. $r^{0\to b}|_{K^-(b+\varepsilon)} = \{r^{0\to b}|_{K^-(b+\varepsilon)}(t)\}_{t\in[0,1]}$ は，$[0, b+\varepsilon]$ に値をとるように条件付けられた $[0,1]$ 上の 0 出発 b 到達の 3 次元 *Bessel* 橋とする．このとき，

$$r^{0\to b}|_{K^-(b+\varepsilon)} \xrightarrow{\mathcal{D}} H^{0\to b}, \quad (\varepsilon \downarrow 0)$$

が成り立つ．

以上で，Brown 引越過程の 2 通りの構成方法を紹介した．最後に，Brown 引越過程のパスの分解公式を紹介する．そのためにまず，$w_1 \in C([0,t],\mathbb{R})$ と $w_2 \in C([t,1],\mathbb{R})$ が $w_1(t) = w_2(t)$ をみたすとき，$w_1 \oplus_t w_2 \in C([0,1],\mathbb{R})$ を次式で定義する：

$$(w_1 \oplus_t w_2)(s) := \begin{cases} w_1(s), & s \in [0,t] \\ w_2(s), & s \in [t,1] \end{cases}$$

このとき，Brown 引越過程のパスの分解公式は次の通りである．

定理 3. $C([0,1],\mathbb{R})$ 上の任意の有界連続関数 F に対し，次式

$$E\left[F(H^{0\to b})\right] = \int_0^b E\left[F\left(r^{0\to y}_{[0,t]}|_{K^-_{[0,t]}(b)} \oplus_t (b - \overleftarrow{r}^{0\to b-y}_{[t,1]}|_{K^-_{[t,1]}(b)})\right)\right] P\left(H^{0\to b}(t) \in dy\right), \qquad 0 < t < 1, \tag{3.1}$$

が成立する．ただし，$r^{0\to y}_{[0,t]}|_{K^-_{[0,t]}(b)} = \{r^{0\to y}_{[0,t]}|_{K^-_{[0,t]}(b)}(s)\}_{s\in[0,t]}$ は，$[0,b]$ に値をとるように条件付けられた “$[0,t]$ 上の 0 出発 y 到達の 3 次元 *Bessel* 橋” である．また，$\overleftarrow{r}^{0\to b-y}_{[t,1]}|_{K^-_{[t,1]}(b)} = \{\overleftarrow{r}^{0\to b-y}_{[t,1]}|_{K^-_{[t,1]}(b)}(s)\}_{s\in[t,1]}$ は，

$$\overleftarrow{r}^{0\to b-y}_{[t,1]}|_{K^-_{[t,1]}(b)}(s) = r^{0\to b-y}_{[t,1]}|_{K^-_{[t,1]}(b)}(t+1-s), \qquad s \in [t,1]$$

と定義され，$[0,b]$ に値をとるように条件付けられた “$[t,1]$ 上の 0 出発 $b-y$ 到達の 3 次元 *Bessel* 橋” を時間反転させた確率過程である．なお，(3.1) に表れるこの 2 つの確率過程 $r^{0\to y}_{[0,t]}|_{K^-_{[0,t]}(b)}$ と $\overleftarrow{r}^{0\to b-y}_{[t,1]}|_{K^-_{[t,1]}(b)}$ は独立であるとする．

なお，Brown 引越過程のサンプルパスを効率的に生成するためには，このパスの分解公式が必要となる．

参考文献

[1] P. Billingsley: Convergence of Probability Measures, Wiley New York, 1968.

[2] Z. Ciesielski and S. J. Taylor: *First passage times and sojurn times for Brownian motion in space and the exact Hausdorff measure of the sample path*, Trans. Amer. Math. Soc. **103** (1962), 434–450.

[3] R. T. Durrett, D. L. Igrehart and D. R. Miller: *Weak convergence to Brownian meander and Brownian excursion*, The Annals of Probability. **5** (1977), 117–129.

[4] I. Karatzas and S. E. Shreve: Brownian motion and Stochastic calculus, Springer, Science+Business Media, Inc. in 1998, 2nd ed.

[5] J. Pitman and M. Yor: *A decomposition of Bessel bridges*, Z. Wahrschinlichkeitstheorie verw. Gebiete **59** (1982), 425–457.

[6] J. Pitman and M. Yor: *The law of the maximum of Bessel bridge*, Electronic Journal of Probability **15** (1999), 1–35.

[7] D. Revuz and M. Yor: Continuous martingales and Brownian motion, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1999, 3rd ed.