多変量長期記憶定常過程に対するテプリッツ系

(Junho Yang 氏との共同研究)

井上 昭彦　(広島大学)

$\mathbb{C}^{m\times n}$ は $m\times n$ の複素行列の全体とし，$\mathbb{C}^q$ で $\mathbb{C}^{q\times 1}$ を表す．$a\in\mathbb{C}^{m\times n}$ に対し，$a^\top$ は a の転置を, a^* は a の Hermite 共役を，それぞれ表す．$a\in\mathbb{C}^{q\times q}$ に対し，そのスペクトル・ノルム $\|a\|$ は

$$\|a\| := \sup_{u\in\mathbb{C}^q,|u|\le 1} |au|$$

で定義される．ここで，$u=(u^1,\ldots,u^q)^\top\in\mathbb{C}^q$ に対し，$|u| := (\sum_{i=1}^q |u^i|^2)^{1/2}$．$\mathbb{T} := \{z\in\mathbb{C} : |z|=1\}$ を $\mathbb{C}$ の単位円，$\overline{\mathbb{D}} := \{z\in\mathbb{C} : |z|\le 1\}$ を $\mathbb{C}$ の単位閉円板とする．

行列値関数 $g:\mathbb{T}\to\mathbb{C}^{q\times q}$ に対する次の条件を考える：

$g(z)$ の成分は $\overline{\mathbb{D}}$ 上に極を持たない z の有理関数であり，
$\det g$ は $\overline{\mathbb{D}}$ 上に零点を持たない． (C)

$q\in\mathbb{N}$ と $d\in(0,1/2)$ に対し，$\{X_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は $\mathbb{C}^q$-値弱定常過程で，次の形のスペクトル密度 w を持つとする：

$$w(e^{i\theta}) = |1-e^{i\theta}|^{-2d} g(e^{i\theta}) g(e^{i\theta})^*.\ \text{ここで } g:\mathbb{T}\to\mathbb{C}^{q\times q} \text{ は (C) を満たす.} \tag{F}$$

従って，(F) を満たす w に対し，次が成り立つ：

$$E[X_k X_0^*] = \gamma(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} w(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \in \mathbb{C}^{q\times q}, \qquad k\in\mathbb{Z}.$$

この $\{X_k\}$ は，q-変量 **ARFIMA (Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average) 過程**などとよばれる．$\{X_k\}$ の自己共分散関数 γ が $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|\gamma(k)\| = \infty$ を満たすという意味で，$\{X_k\}$ は**長期記憶**を持つ．

w をシンボルとする次の有限および無限ブロック・テプリッツ行列 $T_n(w)$ と $T_\infty(w)$ を考える：

$$T_n(w) := \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(-1) & \cdots & \gamma(-n+1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \cdots & \gamma(-n+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(n-1) & \gamma(n-2) & \cdots & \gamma(0) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{qn\times qn}, \qquad n\in\mathbb{N},$$

$$T_\infty(w) := \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(-1) & \gamma(-2) & \cdots \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \gamma(-1) & \cdots \\ \gamma(2) & \gamma(1) & \gamma(0) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

$n\in\mathbb{N}$ と $s,t\in\{1,\ldots,n\}$ に対し，$(T_n(w)^{-1})^{s,t}\in\mathbb{C}^{q\times q}$ は，逆行列 $T_n(w)^{-1}$ の (s,t) ブロックを表す:$T_n(w)^{-1} = ((T_n(w)^{-1})^{s,t})_{1\le s,t\le n}$．$T_\infty(w)^{-1}$ の (s,t) ブロック $(T_\infty(w)^{-1})^{s,t}\in\mathbb{C}^{q\times q}$ も同様に定義される．

定理 1. $d \in (0, 1/2)$ に対し，w は (F) を満たすとする．このとき，次の不等式を満たす $K = K(w) \in (0, \infty)$ が存在する：

$$\sum_{s=1}^{p} \sum_{t=1}^{p} \|(T_n(w)^{-1})^{s,t} - (T_\infty(w)^{-1})^{s,t}\| \le K n^{-1/2} p^{(3/2)-2d}, \quad n \in \mathbb{N},\ p \in \{1, \dots, n\}.$$

ここで K は n や p にはよらない．

$d \in (0, 1/2)$ として，$\mathbb{C}^q$-値列 $\{y_t\}_{t=1}^{\infty}$ に対する次の2つの条件を考える：

$$u > 1 - d \text{ を満たすある } u \text{ に対し，} |y_t| = O(t^{-u}) \ (t \to \infty), \tag{A}$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} |y_t| < \infty. \tag{B}$$

(A) または (B) の下で，無限ブロック・テプリッツ系

$$T_\infty(w)\mathbf{z} = \mathbf{y}, \qquad \mathbf{y} = (y_1^\top, y_2^\top, \dots)^\top, \quad y_t \in \mathbb{C}^q \ (t \in \mathbb{N}) \tag{1}$$

は，一意解 $\mathbf{z} = (z_1^\top, z_2^\top, \dots)^\top$，ただし $z_t \in \mathbb{C}^q$ $(t \in \mathbb{N})$，を持つ．我々は，$T_n(w)^{-1}$ を用いて $\mathbf{z}$ のよい近似を与える問題を考える．そのために，次のようにおく：

$$z_{n,p,s} := \sum_{t=1}^{p} (T_n(w)^{-1})^{s,t} y_t \in \mathbb{C}^q, \qquad n \in \mathbb{N},\ p \in \{1, \dots, n\},\ s \in \{1, \dots, p\}. \tag{2}$$

定理 2. $d \in (0, 1/2)$ に対し，w は (F) を満たすとする．(A) または (B) の下で，$\mathbf{z} = (z_1^\top, z_2^\top, \dots)^\top$ は (1) の解とする．また，ある $r \in (0, 1/(3-4d))$ に対し，$\mathbb{N}$-値列 $\{p(n)\}_{n=1}^{\infty}$ は，$p(n) \le n$ および $p(n) \sim n^r$ $(n \to \infty)$ を満たすとする．

(i) (A) を仮定する．このとき，$1/(2u+1-2d) < r < 1/(3-4d)$ ならば，

$$\sum_{s=1}^{p(n)} |z_s - z_{n,p(n),s}| = O(n^{-(1/2)+((3/2)-2d)r}), \qquad n \to \infty \tag{3}$$

が成り立ち，$0 < r \le 1/(2u+1-2d)$ ならば，次が成り立つ：

$$\sum_{s=1}^{p(n)} |z_s - z_{n,p(n),s}| = O(n^{-(u+d-1)r}), \qquad n \to \infty. \tag{4}$$

(ii) (B) を仮定する．このとき，次が成り立つ：

$$\sum_{s=1}^{p(n)} |z_s - z_{n,p(n),s}| = O\left(\sum_{t=p(n)+1}^{\infty} |y_t|\right) + O(n^{-(1/2)+((3/2)-2d)r}), \qquad n \to \infty. \tag{5}$$

(3)–(5) の右辺の n の肩にある指数はすべて負であることを注意せよ．定理 2 によれば，$\lim_{n\to\infty} p(n) = \infty$ であるにもかかわらず，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{p(n)} |z_s - z_{n,p(n),s}| = 0$$

が成り立ち，しかもその収束のオーダーが与えられているという意味で．$z_{n,p(n),s}$ は z_s のよい近似になっていることが分かる．