KPZ モデルと有限温度フェルミオン点過程:
歪 RSK ダイナミクスによるアプローチ

今村 卓史 (千葉大学), Matteo Mucciconi (University of Warwick), 笹本 智弘 (東京工業大学)

相互作用確率粒子系の中には背後に量子可積分性に関連した代数的な構造を持つものがあり，それを利用することによって粒子の位置やカレントの分布関数の具体形を求めることができる．このような研究は近年盛んに行われ，可積分確率 (integrable probability) と呼ばれるようになった．本講演では，Matteo Mucciconi 氏 (University of Warwick) と笹本 智弘氏 (東京工業大学) との共同研究によって得られた可積分確率に関する最近の結果 [5] についてお話しする．

以下で，$a_i, b_j, q \in [0,1)$, $i = 1, \cdots, N$, $j = 1, \cdots, M$ とし $\mathcal{P}$ を分割全体の集合とする．また q-Pochhammer 記号を $(a;q)_n := \prod_{j=1}^{n}(1-aq^{n-1})$, $(a;q)_\infty := \prod_{j=1}^{\infty}(1-aq^{n-1})$ で表す．

まず $\mathcal{P}$ 上の 2 種類の確率測度を導入する．

定義 1. (q-Whittaker 測度 [3]) $\mu \in \mathcal{P}$ に対して，

$$M_{q\mathrm{W}}(\mu) = P_\mu(a_1, \ldots, a_N) Q_\mu(b_1, \ldots, b_M)/Z_{q\mathrm{W}}$$

によって定義される $\mathcal{P}$ 上の確率測度を q-Whittaker 測度と呼ぶ．ただし P_μ, Q_μ は q-Whittaker 関数 (Macdonald 対称多項式 [6] の 2 つのパラメータ q, t のうち $t = 0$ としたもの) であり，$Z_{q\mathrm{W}} = \prod_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{M}\frac{1}{(a_ib_j;q)_\infty}$ である．

定義 2. (周期的シューア測度 [2]) $\lambda \in \mathcal{P}$ に対して，

$$M_{\mathrm{pS}}(\lambda) = \sum_{\substack{\rho \in \mathcal{P} \\ \rho(\subset\lambda)}} q^{|\rho|} s_{\lambda/\rho}(a_1, \ldots, a_N) s_{\lambda/\rho}(b_1, \ldots, b_M)/Z_{\mathrm{pS}}$$

によって定義される $\mathcal{P}$ 上の確率測度を周期的シューア測度と呼ぶ．ただし $s_{\lambda/\rho}$ は歪 Schur 関数 [6]，$Z_{\mathrm{pS}} = \frac{1}{(q;q)_\infty}\prod_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{M}\frac{1}{(a_ib_j;q)_\infty}$ である．

q-Whittaker 測度は Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) クラスに属する確率過程と関係することが知られている [3]．例えば μ_1 を定義 1 の $M_{q\mathrm{W}}(\mu)$ で分布するランダムな分割 μ の第一成分とし，$X_1(M)$ を q-pushTASEP と呼ばれる粒子数が N 個の相互作用確率粒子系の先頭の粒子の時刻 M における位置とする．このとき $\mu_1 \stackrel{\mathrm{d}}{=} X_1(M)$，つまり μ_1 と $X_1(M)$ は同分布であることが知られている．さらに最近の可積分確率の研究で，Bethe 仮説等の量子可積分系の手法を用いて様々KPZ モデルにおける行列式公式が明らかになっているが，かなり複雑な計算を要する上に行列式構造の確率論的意味もよくわからない状況であった．

他方周期的 Schur 測度は適当なランダムシフトによって行列式点過程となることが [2] によって示されている．また有限温度自由フェルミオンを記述することも知られている [1]．

本講演の主結果は以下のとおりであり，上の 2 つの確率測度の関係を表している．

定理 3. ([4,5]) λ, μ をそれぞれ *q-Whittaker* 測度，周期的 *Schur* 測度で分布するランダムな分割とし λ_1, μ_1 をそれぞれの第一成分とする．また χ を分布 $\mathbb{P}(\chi = n) = (q;q)_\infty q^n/(q;q)_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に従う確率変数とする．このとき $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\mathbb{P}(\mu_1 + \chi \leq n) = \mathbb{P}(\lambda_1 \leq n)$$

が成り立つ．

上の定理 3 は，KPZ モデルと有限温度フェルミオン点過程との関係を明示的に表している．この関係によって KPZ モデルに現れる行列式構造の起源が有限温度自由フェルミオンにあることが示唆される．上の定理 3 の証明のために，我々は組み合わせ論的な 1 対 1 対応によるアプローチをとる．

定理 4. ([5]) 1 対 1 対応 T

$$(V, W, \kappa, \nu) \overset{T}{\leftrightarrow} (P, Q)$$

が存在する．ただし右辺の (P, Q) は同じ形をもつ歪半標準盤のペアを表し，左辺の (V, W, κ, ν) は以下のように定義される．

- (V, W) : 同じ形を持つ vertically strict tableaux(VST) のペア
- $\kappa = (\kappa_1, \cdots, \kappa_{\mu_1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\mu_1}$であり，上の (V, W) の形を μ として $\mu'_i = \mu'_{i+1}$ ならば $\kappa_i \geq \kappa_{i+1}$ をみたすもの．
- $\nu \in \mathcal{P}$.

ただし形 μ の VST とは，ヤング図形 μ に数字が入ったもので，それらの数字は下方向に単調増大するもののことである．(以下の例 5 参照)

上の (V, W, κ, ν) と (P, Q) はそれぞれ q-Whittaker 測度と周期的 Schur 測度の組み合わせ論的対応物であり定理 4 から直ちに定理 3 が従う．

例 5. 形 $\mu = (4, 3, 1)$ の VST の例: $\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & \\ 3 & & & \end{array}$

定理 4 の対応 T はその存在だけでなく，歪 RSK ダイナミクスと呼ばれる歪半標準盤のペアの力学系を考察することによって具体的なアルゴリズムも得られる．(以下の例 6 参照．)

例 6. T によって例えば以下のような対応が得られる．

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & \\ 3 & & & \end{array}, \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & \\ 3 & & & \end{array}; (0, 1, 1, 1); \varnothing \right) \xleftrightarrow{T} \left(\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & \\ 2 & & & \end{array}, \begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & 2 \\ \cdot & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & \\ 3 & & & \end{array} \right).$$

アルゴリズムの構成には，歪 RSK ダイナミクスの持つ対称性が重要な役割を果たすが，その対称性は，量子群に関連するアファインクリスタルや Demazure クリスタルによって明らかになる．

References

[1] D. Betea and J. Bouttier, The periodic Schur process and free Fermions at finite temperature, *Math. Phys. Anal. Geom.*, 22:3, 2019.

[2] A. Borodin. Periodic Schur process and cylindric partitions. *Duke Math. J.,* 391–468, 2007.

[3] A. Borodin and I. Corwin. Macdonald processes. *Probab. Theory Relat. Fields,* 158:225–400, 2014.

[4] T. Imamura, M. Mucciconi, and T. Sasamoto. Identity between restricted Cauchy sums for the q-Whittaker and skew Schur polynomials. arXiv: 2106.11913

[5] T. Imamura, M. Mucciconi, and T. Sasamoto. Skew RSK dynamics: Greene invariants, affine crystals and applications to q-Whittaker polynomials. arXiv:2106.11922

[6] I.G. Macdonald. *Symmetric Functions and Hall Polynomials.* Oxford classic texts in the physicalsciences. Clarendon Press, 1998.