ランダム行列とその主小行列の固有値分布

藤江　克徳　(北海道大学)*

概　要

In this talk, we observe a concentration phenomenon on the empirical eigenvalue distribution (EED) of the principal submatrix in a random hermitian matrix whose distribution is invariant under unitary conjugacy; for example, this class includes GUE (Gaussian Unitary Ensemble) and Wishart matrices. More precisely, if the EED of the whole matrix converges to some deterministic probability measure $\mathfrak{m}$, then the difference of rescaled EEDs of the whole matrix and of its principal submatrix concentrates at the Rayleigh measure (in general, a Schwartz distribution) associated with $\mathfrak{m}$ by the Markov–Krein correspondence. For the proof, we use the moment method with Weingarten calculus and free probability. At some stage of calculations, the proof requires a relation between the moments of the Rayleigh measure and free cumulants of $\mathfrak{m}$. This formula is more or less known, but we provide a different proof by observing a combinatorial structure of non-crossing partitions. This talk is based on joint works [3] with Takahiro Hasebe in Hokkaido university.

本講演ではユニタリ共役不変なランダムエルミート行列の主小行列，その固有値分布の集中現象についてお話しする．なお本講演は長谷部高広氏との共同研究 [3] に基づく．以下では講演の内容を簡単に紹介する．

1. Introduction & Main Results

A_N を N 次ランダムエルミート行列とする．任意のユニタリ行列 U_N に対して $U_N^* A_N U_N$ と A_N の分布が等しいとき A_N はユニタリ共役不変であるという．一般にエルミート行列 $A_N = (a_{ij})_{i,j=1}^N$ の主小行列 $\widetilde{A}_N = (a_{ij})_{i,j=1}^{N-1}$ もまたエルミート行列になるが，それぞれの固有値を大きさ順に番号づけ $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$, $\{\tilde{\eta}_j\}_{j=1}^{N-1}$ と表したとき次の不等式が成り立つ (Cauchy interlacing theorem):

$$\lambda_i \le \tilde{\eta}_i \le \lambda_{i+1}, \quad (i = 1, \dots, N-1).$$

Interlace する数列（より一般に Rayleigh 測度）については Kerov による Markov–Krein 対応の研究がよく知られている [5]．Kerov は関連する研究の一つとして Wigner 行列を Haar 直交行列について共役をとったものとその主小行列の固有値分布の関係を調べ，サイズ N が大きくなっていくと主小行列の固有値分布が元の行列の固有値分布から Markov–Krein 対応によって得られる確率分布に収束していくという結果を得た [4]．また，Bufetov は Wigner，Wishart 行列の両クラスについて同様の結果が成り立つことを示した [1]．おそらくこれらの結果から Goel–Yao はユニタリ共役不変なランダムエルミート行列のクラスについても同様の結果が成り立つことを予想し [2] において次の主張を提示した．

* 〒060-0810 北海道札幌市北区北 10 条西 8 丁目 北海道大学大学院理学院数学専攻
e-mail: kfujie@eis.hokudai.ac.jp

定理 1. A_N をユニタリ共役不変なランダムエルミート行列，$\mathfrak{m}_N$ を A_N の経験固有値分布とする．$\mathfrak{m}_N$ がある確率測度 $\mathfrak{m}$ に確率弱収束するとき，A_N とその主小行列 $\widetilde{A}_N$ から作られる Rayleigh 測度 $\tilde{\tau}_N = \sum_{i=1}^{N} \delta_{\lambda_i} - \sum_{j=1}^{N-1} \delta_{\tilde{\eta}_j}$ は $\mathfrak{m}$ から Markov–Krein 変換によって得られる Rayleigh 測度 τ に確率弱収束する．

注意 2. この定理はランダム行列理論における folklore—つまり正しいことをほとんどの専門家が認識していたがだれも証明を知らない定理—だったらしい．

2. Overview of the Proof

我々は問題の主張を整理し，モーメントを使用できる条件下で主張が正しいことを証明した．解決の鍵になったのは Weingarten calculus における次の公式である:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \circ \mathrm{Tr}_{\sigma}[A_1 U_N B_1 {U_N}^*, \dots, A_k U_N B_k {U_N}^*] \\
&\quad = \sum_{\substack{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3 \in \mathfrak{S}_k \\ \sigma_1\sigma_2\sigma_3=\sigma}} \mathrm{Tr}_{\sigma_1}[A_1, \dots, A_k]\, \mathrm{Tr}_{\sigma_2}[B_1, \dots, B_k]\, \mathrm{Wg}(\sigma_3, N),
\end{aligned}$$

ここで, A_i, B_i $(i = 1, \dots, k)$ は $N \times N$ 行列で $\sigma \in \mathfrak{S}_k$.

この公式を用いて計算を進めていくと次の結果が示唆される:

定理 3. $\mathfrak{m}$ を確率測度で τ をその Rayleigh 測度とする．このとき

$$\mathrm{M}_k(\tau) = \sum_{\rho \in \mathrm{NC}(k)} (k + 1 - |\rho|)\, \mathrm{R}_{\rho}(\mathfrak{m})$$

が成り立つ．ここで, $\mathrm{NC}(k)$ は $\{1, \dots, k\}$ の非交差分割で $\mathrm{R}_{\rho}(\mathfrak{m})$ は $\mathfrak{m}$ の自由キュムラントである．

参考文献

[1] A. Bufetov, “*Kerov’s interlacing sequences and random matrices*”, Journal of Mathematical Physics, Volume 54, 2013.

[2] G. Goel and A. Yao, “*A quantized analogue of the Markov-Krein correspondence*”, arXiv preprint arXiv:2011.10724, 2020

[3] K. Fujie and T. Hasebe, The spectra of principal submatrices in rotationally invariant hermitian random matrices and the Markov-Krein correspondence, ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat., to appear. arXiv:2103.09025

[4] S. Kerov, “*Asymptotics of the separation of roots of orthogonal polynomials*”, St. Petersburg Mathematical Journal, Volume 5, 925-941, 1994.

[5] S. Kerov, “*Interlacing measures*”, American Mathematical Society Translations, 35-84, 1998.