

Itô–Föllmer calculus in infinite dimensions

Yuki Hirai*

The Itô–Föllmer calculus is a pathwise approach to Itô’s stochastic calculus. Föllmer [1] proved that a deterministic càdlàg path satisfies the Itô formula if it has quadratic variation along a given sequence of partitions. Föllmer’s result enables one to construct the Itô type integral $\int_0^t f(X_{s-})dX_s$, which is defined as the limit of non-anticipative Riemannian sums, for a nice function f and a path X that admits a quadratic variation. We call this framework the Itô–Föllmer calculus. Recently, the Itô–Föllmer calculus has seen increasing developments, receiving much attention from the viewpoint of its financial applications. In particular, it has been used to study financial trading strategies in a strictly pathwise manner.

In this talk, we consider the following differential equation in the framework of the Itô–Föllmer calculus.

$$(1) \quad \begin{cases} dY_t = AY_t dt + dX_t, & t \geq 0, \\ Y_0 = x. \end{cases}$$

Here, $A: E \rightarrow E$ is some linear operator in a Banach space and $X: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow E$ is a càdlàg path that corresponds to noise term. This equation is interpreted as a strictly pathwise version of a linear stochastic partial differential equation (SPDE) with additive noise. We aim to solve equation (1) explicitly in the framework of the Itô–Föllmer calculus in Banach spaces, which was developed by the author [3, 2].

To describe our results, let us define quadratic variations of a Banach space valued path. Fix a sequence $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ of partitions on $\mathbb{R}_{\geq 0}$ such that $|\pi_n| \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. A Banach space valued càdlàg path $X: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow E$ has tensor quadratic variation along (π_n) if there is a càdlàg path $[X, X]: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow E \widehat{\otimes}_{\pi} E$ of finite variation satisfying the following conditions:

- (i) The sequence $\sum_{]r,s] \in \pi_n} (X_{s \wedge t} - X_{r \wedge t})^{\otimes 2}$ converges to $[X, X]_t$ for all $t \geq 0$.
- (ii) The equation $\Delta[X, X]_t = \Delta X_t^{\otimes 2}$ holds for all $t \geq 0$.

Here, $E \widehat{\otimes}_{\pi} E$ denotes the projective tensor product of the Banach space E . Moreover, we say that X has scalar quadratic variation along (π_n) if there is an increasing càdlàg path $Q(X): \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ such that

- (i) the sequence $\sum_{]r,s] \in \pi_n} \|X_{s \wedge t} - X_{r \wedge t}\|^2$ converges to $Q(X)_t$ for all $t \geq 0$, and
- (ii) the equation $\Delta Q(X)_t = \|\Delta X_t\|^2$ holds for all $t \geq 0$.

The first main result is an extension of the Itô–Föllmer formula of [3]. Given two Banach spaces E and F , let $\mathcal{L}(E, F)$ denote the space of all bounded linear operators. We define a family of seminorms (ρ_K) index by the compact subsets of E as

$$\rho_K(A) = \inf\{C > 0 \mid \|Ax\| \leq C\|x\| \text{ for all } x \in K\}.$$

We use the symbol $\mathcal{L}_K^{\text{Lip}}(E, F)$ for space $\mathcal{L}(E, F)$ with the topology induce by (ρ_K) . Then, our extended Itô–Föllmer formula is stated as follows.

Theorem 1. *Let $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \times E \rightarrow F$ be a continuous function satisfying the following conditions:*

*Graduate School of Engineering Science, Osaka University

- (i) The function $[0, \infty[\ni t \mapsto f(t, x) \in F$ is differentiable for all $x \in E$ and $\partial_t f(t, x)$ is jointly continuous on $[0, \infty[\times E$.
- (ii) The map $x \mapsto f(t, x)$ is twice Fréchet differentiable for all $t \in [0, \infty[$ and derivatives $\partial_x f: \mathbb{R}_{\geq 0} \times E \rightarrow \mathcal{L}_K^{\text{Lip}}(E, F)$ and $\partial_x^2 f: \mathbb{R}_{\geq 0} \times E \rightarrow \mathcal{L}_K^{\text{Lip}}(E \widehat{\otimes}_\pi E, F)$ are continuous.

If X has tensor and scalar quadratic variations along (π_n) , then

$$(2) \quad f(t, X_t) - f(0, X_0) = \int_0^t \partial_s f(s, X_{s-}) ds + \int_0^t \partial_x f(s, X_{s-}) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_x^2 f(s, X_{s-}) d[X, X]_s^c + \sum_{0 < s \leq t} \{ \Delta f(s, X_s) - \partial_x f(s, X_{s-}) \Delta X_s \},$$

where the second integral on the right hand side of (2) is defined as the Itô–Föllmer integral.

As an application of Theorem 1, we can solve equation (1) explicitly by means of the Itô–Föllmer integral. This result is interpreted as a pathwise version of the variation of constant formula for a linear SPDE with additive noise.

Theorem 2. Let $A: E \rightarrow E$ be the generator of a C_0 -semigroup $(T_t)_{t \geq 0}$ and X a càdlàg path in $\text{Dom } A$ starting at 0. We suppose that X has tensor and scalar quadratic variations along (π_n) . Then there is a unique càdlàg path Y satisfying

$$(3) \quad Y_t = x + A \int_0^t Y_s ds + X_t, \quad t \geq 0$$

for every initial value $x \in E$. The solution Y is represented as

$$(4) \quad Y_t = T(t)x + \int_0^t \langle T(t-s), dX_s \rangle, \quad t \geq 0$$

where the second term is defined as the Itô–Föllmer integral. Moreover, if $x \in \text{Dom } A$, the path of (4) is a classical solution to (3).

Finally, we use Theorem 2 to construct a Heath–Jarrow–Morton model of bond markets in a strictly pathwise manner. In the HJM model, forward rate dynamic is supposed to satisfy the equation

$$d_t f(t, \xi) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} f(t, \xi) + \alpha(t, \xi) \right) dt + \sigma(t, \xi) dX_t.$$

With an appropriate setting of Hilbert space and a certain assumption on volatility σ , we can construct the forward rate function f in the framework of the Itô–Föllmer calculus.

References

- [1] H. Föllmer. “Calcul d’Itô sans probabilités”. In: *Séminaire de Probabilités XV 1979/80*. Lecture Notes in Mathematics 850. Springer Berlin Heidelberg, 1981, pp. 143–150. doi: [10.1007/BFb0088355](https://doi.org/10.1007/BFb0088355).
- [2] Yuki Hirai. *Itô–Föllmer Calculus in Banach Space II: Transformations of Quadratic Variations*. 2021. arXiv: [2105.08262](https://arxiv.org/abs/2105.08262) [math.PR].
- [3] Yuki Hirai. *Itô–Föllmer Calculus in Banach Spaces I: The Itô Formula*. 2021. arXiv: [2104.08138](https://arxiv.org/abs/2104.08138) [math.PR].

A partial rough path space for rough volatility

Masaaki Fukasawa (Osaka University) Ryoji Takano (Osaka University)

A rough volatility model is a stochastic volatility model for an asset price process with volatility being rough, meaning that the Hölder regularity of the volatility path is less than half. We focus on a model of the following form:

$$dS_t = \sigma(S_t) f(\hat{X}_t) dX_t, \quad S_0 \in \mathbb{R} \quad (0.1)$$

where X is a Brownian motion and \hat{X} is a Riemann-Liouville fractional Brownian motion with the Hurst parameter $H < 1/4$. Our aim is to develop a rough path framework to deal with such an (Itô) integration of an uncontrolled path. Suppose that $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$), $\hat{x} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, and $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are good enough. By Taylor expansion, for $\tau_1 < \tau_2$ (these are close enough),

$$\begin{aligned} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\hat{x}_r) \otimes dx_r &\sim f(\hat{x}_{\tau_1}) \otimes (x_{\tau_2} - x_{\tau_1}) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \nabla^i f(\hat{x}_{\tau_1}) \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\hat{x}_r - \hat{x}_{\tau_1})^i \otimes dx_r \\ \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\int_{\tau_1}^r dy_u \right) dy_r &\sim \sum_{0 \leq j+k \leq n} \frac{1}{j!k!} \nabla^j f(\hat{x}_{\tau_1}) \nabla^k f(\hat{x}_{\tau_1}) \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\hat{x}_r - \hat{x}_{\tau_1})^k \left(\int_{\tau_1}^r (\hat{x}_u - \hat{x}_{\tau_1})^j \otimes dx_u \right) \otimes dx_r, \end{aligned}$$

where $y_t := \int_0^t f(\hat{x}_r) \otimes dx_r$. Therefore, if we preliminarily could define

$$Z_{st}^{(i)} := \frac{1}{i!} \int_s^t (\hat{x}_r - \hat{x}_s)^i \otimes dx_r, \quad A_{st}^{(j,k)} := \frac{1}{k!} \int_s^t (\hat{x}_r - \hat{x}_s)^k Z_{sr}^{(j)} \otimes dx_r,$$

we would be able to define a rough path integral $\int f(\hat{x}_r) \otimes dx_r$. By the linearity of the integration and the binomial theorem, $Z^{(i)}$ and $A^{(j,k)}$ satisfy the following formula respectively;

for any $i, j, k \geq 0$, and $s \leq u \leq t$,

$$Z_{st}^{(i)} = Z_{su}^{(i)} + \sum_{p=0}^i \frac{1}{(i-p)!} (\hat{X}_{su})^{i-p} Z_{ut}^{(p)} \quad (0.2)$$

$$A_{st}^{(j,k)} = A_{su}^{(j,k)} + \sum_{q=0}^k \frac{1}{(k-q)!} (\hat{X}_{su})^{k-q} Z_{su}^{(j)} \otimes Z_{ut}^{(q)} + \sum_{p=0}^j \sum_{q=0}^k \frac{1}{(j-p)!(k-q)!} (\hat{X}_{su})^{j+k-p-q} A_{ut}^{(p,q)} \quad (0.3)$$

In light of these formulas, we define the following space $\Omega_{(\alpha, H)\text{-Hld}}$. In this article, fix $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, $H \in (0, \frac{1}{2})$, $\Delta_T := \{(s, t); 0 \leq s \leq t \leq T\}$, $I := \{i \in \mathbb{Z}; iH + \alpha \leq 1\}$, and $J := \{(j, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; (j+k)H + 2\alpha \leq 1\}$.

Definition 0.1. An (α, H) rough path $\mathbb{X} = (\hat{X}, Z^{(i)}, A^{(j,k)})_{i \in I, (j,k) \in J}$ is a triplet of functions on Δ_T satisfying the following conditions; for any $i \in I$, $(j, k) \in J$ and $s \leq u \leq t$,

- (i) \hat{X} is \mathbb{R} -valued, $Z^{(i)}$ is \mathbb{R}^d -valued, and $A^{(j,k)}$ is $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ -valued function.
- (ii) *Modified Chen's relation*; $\hat{X}_{st} = \hat{X}_{su} + \hat{X}_{ut}$, and $Z^{(i)}$ and $A^{(j,k)}$ satisfy (0.2) and (0.3) respectively.
- (iii) *Hölder regularities*;

$$|\hat{X}_{st}| \lesssim |t - s|^H, \quad |Z_{st}^{(i)}| \lesssim |t - s|^{iH + \alpha}, \quad |A_{st}^{(j,k)}| \lesssim |t - s|^{(j+k)H + 2\alpha}$$

Let $\Omega_{(\alpha, H)\text{-Hld}}$ denote the space of the (α, H) -rough paths. We define a metric function $d_{(\alpha, H)}$ on $\Omega_{(\alpha, H)\text{-Hld}}$ and $|||\mathbb{X}|||_{(\alpha, H)}$ as following;

$$d_{(\alpha, H)}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) := \|\hat{X} - \hat{Y}\|_{H\text{-Hld}} + \sum_{i \in I, (j,k) \in J} \|Z_{st}^{(i)}(\mathbb{X}) - Z_{st}^{(i)}(\mathbb{Y})\|_{iH + \alpha\text{-Hld}} + \|A_{st}^{(j,k)}(\mathbb{X}) - A_{st}^{(j,k)}(\mathbb{Y})\|_{(j+k)H + 2\alpha\text{-Hld}}$$

$$|||\mathbb{X}|||_{(\alpha, H)} := \|\hat{X}\|_{H\text{-Hld}} + \sum_{i \in I, (j,k) \in J} \|Z_{st}^{(i)}\|_{iH + \alpha\text{-Hld}} + \|A_{st}^{(j,k)}\|_{(j+k)H + 2\alpha\text{-Hld}}$$

Definition 0.2. Fix $\mathbb{X} \in \Omega_{(\alpha, H)\text{-Hld}}$. We define $Y^{(1)}$ and $Y^{(2)}$ as follows if exist;

$$Y_{st}^{(1)} := \lim_{|\mathcal{P}| \searrow 0} \sum_{p=1}^N \sum_{i \in I} \nabla^i f(\hat{X}_{t_{p-1}}) Z_{t_{p-1}t_p}^{(i)}, \quad Y_{st}^{(2)} := \lim_{|\mathcal{P}| \searrow 0} \sum_{p=1}^N \left(Y_{t_0t_{p-1}}^{(1)} \otimes Y_{t_{p-1}t_p}^{(1)} + \sum_{(j,k) \in J} \nabla^j f(\hat{X}_{t_{p-1}}) \nabla^k f(\hat{X}_{t_{p-1}}) A_{t_{p-1}t_p}^{(j,k)} \right),$$

where $\hat{x}_s := \hat{X}_{0s}$, and $\mathcal{P} = \{s = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t\}$ is a partition on $[s, t]$. If they exist on Δ_T , we rewrite $(Y^{(1)}, Y^{(2)})$ to $\int f(\hat{X})dX$, and call it the (α, H) rough path integral of f .

Theorem 0.3. Assume that $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is C_b^{n+1} . Then;

(i) For any $\mathbb{X} \in \Omega_{(\alpha, H)\text{-Hld}}$, the (α, H) rough path integral $\int f(\hat{X})dX$ is well-defined, and $\int f(\hat{X})dX \in \Omega_{\alpha\text{-Hld}}([0, T], \mathbb{R}^d)$, where $\Omega_{\alpha\text{-Hld}}([0, T], \mathbb{R}^d)$ is the usual α -Hölder rough path space.

(ii) The integration map $\int : \Omega_{(\alpha, H)\text{-Hld}} \rightarrow \Omega_{\alpha\text{-Hld}}$ is locally Lipschitz continuous. More precisely, for any $M > 0$, the map $\int|_{\mathcal{E}_M}$, restricted on the set

$$\mathcal{E}_M := \{\mathbb{X} \in \Omega_{(\alpha, H)\text{-Hld}} : \|\mathbb{X}\|_{\alpha, H} \leq M\}$$

is Lipschitz continuous; there exist a positive constant $C > 0$ such that,

$$d_\alpha \left(\int f(\hat{V})dV, \int f(\hat{W})dW \right) \leq C d_{(\alpha, H)}(\mathbb{V}, \mathbb{W}), \quad \mathbb{V}, \mathbb{W} \in \mathcal{E}_M,$$

where d_α is the usual metric function on $\Omega_{\alpha\text{-Hld}}([0, T], \mathbb{R}^d)$.

Proposition 0.4. Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ be a filtered probability space. Suppose that $X = (X^1, \dots, X^d)$ is a d -dimensional standard Brownian motion, and by using the Itô integration, we define \hat{X} , $Z^{(i)}$, and $A^{(j,k)}$ as follows (note that $Z^{(0)} = X$); for $(s, t) \in \Delta_T$

$$\hat{X}_{st} := \int_0^t k(t-r) dX_r^1 - \int_0^s k(s-r) dX_r^1, \quad Z_{st}^{(i)} := \frac{1}{i!} \int_s^t (\hat{X}_{su})^i \otimes dX_u$$

$$A_{st}^{(j,k)} := \frac{1}{k!} \int_s^t (\hat{X}_{su})^k Z_{su}^{(j)} \otimes dX_u, \quad k(r) := \frac{1}{\Gamma(H+1/2)} r^{H-1/2}$$

Then;

(i) for a.s. $\omega \in \Omega$, $\left(\hat{X}(\omega), Z^{(i)}(\omega), A^{(j,k)}(\omega) \right)_{i \in I, (j,k) \in J}$ is an (α, H) rough path.

(ii)

$$\left(\int f(\hat{X})dX \right)_{st}^{(1)} = \int_s^t f(\hat{X}_u) \otimes dX_u, \quad a.s.$$

where the left-hand-side is the first level of the (α, H) rough path integral and the right-hand-side the Itô integral.

We now discuss about the following type of RDE (in the sense of Lyon's meaning);

$$dS_t = \sigma(S_t) dZ_t, \quad Z := \int f(\hat{X})dX \in \Omega_{\alpha\text{-Hld}}([0, T], \mathbb{R}^d) \quad (0.4)$$

where $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(1, d)$ is C_b^3 .

Theorem 0.5. (i) RDE (0.4) driven by $Z = \int f(\hat{X})dX$ has the unique solution. Moreover, the solution map;

$$\Omega_{\alpha\text{-Hld}}([0, T], \mathbb{R}^d) \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega_{\alpha\text{-Hld}}([0, T], \mathbb{R}^{d+1})$$

is locally Lipschitz continuous with respect to d_α .

(ii) The first level of the solution to RDE (0.4) is the solution to the Itô SDE (0.1).

多変量長期記憶定常過程に対するテプリッツ系

(Junho Yang 氏との共同研究)

井上 昭彦 (広島大学)

$\mathbb{C}^{m \times n}$ は $m \times n$ の複素行列の全体とし, \mathbb{C}^q で $\mathbb{C}^{q \times 1}$ を表す. $a \in \mathbb{C}^{m \times n}$ に対し, a^\top は a の転置を, a^* は a の Hermite 共役を, それぞれ表す. $a \in \mathbb{C}^{q \times q}$ に対し, そのスペクトル・ノルム $\|a\|$ は

$$\|a\| := \sup_{u \in \mathbb{C}^q, |u| \leq 1} |au|$$

で定義される. ここで, $u = (u^1, \dots, u^q)^\top \in \mathbb{C}^q$ に対し, $|u| := (\sum_{i=1}^q |u^i|^2)^{1/2}$. $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ を \mathbb{C} の単位円, $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ を \mathbb{C} の単位閉円板とする.

行列値関数 $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}^{q \times q}$ に対する次の条件を考える :

$$\begin{aligned} g(z) \text{ の成分は } \mathbb{D} \text{ 上に極を持たない } z \text{ の有理関数であり,} \\ \det g \text{ は } \mathbb{D} \text{ 上に零点を持たない.} \end{aligned} \tag{C}$$

$q \in \mathbb{N}$ と $d \in (0, 1/2)$ に対し, $\{X_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ は \mathbb{C}^q -値弱定常過程で, 次の形のスペクトル密度 w を持つとする :

$$w(e^{i\theta}) = |1 - e^{i\theta}|^{-2d} g(e^{i\theta}) g(e^{i\theta})^*. \quad \text{ここで } g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}^{q \times q} \text{ は (C) を満たす.} \tag{F}$$

従って, (F) を満たす w に対し, 次が成り立つ :

$$E[X_k X_0^*] = \gamma(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} w(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \in \mathbb{C}^{q \times q}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

この $\{X_k\}$ は, q -変量 **ARFIMA (Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average)** 過程などとよばれる. $\{X_k\}$ の自己共分散関数 γ が $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|\gamma(k)\| = \infty$ を満たすという意味で, $\{X_k\}$ は長期記憶を持つ.

w をシンボルとする次の有限および無限ブロック・テプリッツ行列 $T_n(w)$ と $T_\infty(w)$ を考える :

$$\begin{aligned} T_n(w) &:= \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(-1) & \cdots & \gamma(-n+1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \cdots & \gamma(-n+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(n-1) & \gamma(n-2) & \cdots & \gamma(0) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{qn \times qn}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ T_\infty(w) &:= \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(-1) & \gamma(-2) & \cdots \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \gamma(-1) & \cdots \\ \gamma(2) & \gamma(1) & \gamma(0) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$n \in \mathbb{N}$ と $s, t \in \{1, \dots, n\}$ に対し, $(T_n(w)^{-1})^{s,t} \in \mathbb{C}^{q \times q}$ は, 逆行列 $T_n(w)^{-1}$ の (s, t) ブロックを表す: $T_n(w)^{-1} = ((T_n(w)^{-1})^{s,t})_{1 \leq s, t \leq n}$. $T_\infty(w)^{-1}$ の (s, t) ブロック $(T_\infty(w)^{-1})^{s,t} \in \mathbb{C}^{q \times q}$ も同様に定義される.

定理 1. $d \in (0, 1/2)$ に対し, w は (F) を満たすとする. このとき, 次の不等式を満たす $K = K(w) \in (0, \infty)$ が存在する:

$$\sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p \|(T_n(w)^{-1})^{s,t} - (T_\infty(w)^{-1})^{s,t}\| \leq Kn^{-1/2}p^{(3/2)-2d}, \quad n \in \mathbb{N}, p \in \{1, \dots, n\}.$$

ここで K は n や p にはよらない.

$d \in (0, 1/2)$ として, \mathbb{C}^q -値列 $\{y_t\}_{t=1}^\infty$ に対する次の2つの条件を考える:

$$u > 1 - d \text{ を満たすある } u \text{ に対し, } |y_t| = O(t^{-u}) \text{ (} t \rightarrow \infty \text{)}, \quad (\text{A})$$

$$\sum_{t=1}^\infty |y_t| < \infty. \quad (\text{B})$$

(A) または (B) の下で, 無限ブロック・テプリッツ系

$$T_\infty(w)\mathbf{z} = \mathbf{y}, \quad \mathbf{y} = (y_1^\top, y_2^\top, \dots)^\top, \quad y_t \in \mathbb{C}^q \text{ (} t \in \mathbb{N} \text{)} \quad (1)$$

は, 一意解 $\mathbf{z} = (z_1^\top, z_2^\top, \dots)^\top$, ただし $z_t \in \mathbb{C}^q$ ($t \in \mathbb{N}$), を持つ. 我々は, $T_n(w)^{-1}$ を用いて \mathbf{z} のよい近似を与える問題を考える. そのために, 次のようにおく:

$$z_{n,p,s} := \sum_{t=1}^p (T_n(w)^{-1})^{s,t} y_t \in \mathbb{C}^q, \quad n \in \mathbb{N}, p \in \{1, \dots, n\}, s \in \{1, \dots, p\}. \quad (2)$$

定理 2. $d \in (0, 1/2)$ に対し, w は (F) を満たすとする. (A) または (B) の下で, $\mathbf{z} = (z_1^\top, z_2^\top, \dots)^\top$ は (1) の解とする. また, ある $r \in (0, 1/(3-4d))$ に対し, \mathbb{N} -値列 $\{p(n)\}_{n=1}^\infty$ は, $p(n) \leq n$ および $p(n) \sim n^r$ ($n \rightarrow \infty$) を満たすとする.

(i) (A) を仮定する. このとき, $1/(2u+1-2d) < r < 1/(3-4d)$ ならば,

$$\sum_{s=1}^{p(n)} |z_s - z_{n,p(n),s}| = O(n^{-(1/2)+((3/2)-2d)r}), \quad n \rightarrow \infty \quad (3)$$

が成り立ち, $0 < r \leq 1/(2u+1-2d)$ ならば, 次が成り立つ:

$$\sum_{s=1}^{p(n)} |z_s - z_{n,p(n),s}| = O(n^{-(u+d-1)r}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

(ii) (B) を仮定する. このとき, 次が成り立つ:

$$\sum_{s=1}^{p(n)} |z_s - z_{n,p(n),s}| = O\left(\sum_{t=p(n)+1}^\infty |y_t|\right) + O(n^{-(1/2)+((3/2)-2d)r}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

(3)–(5) の右辺の n の肩にある指数はすべて負であることを注意せよ. 定理 2 によれば, $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = \infty$ であるにもかかわらず,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^{p(n)} |z_s - z_{n,p(n),s}| = 0$$

が成り立ち, しかもその収束のオーダーが与えられているという意味で, $z_{n,p(n),s}$ は z_s のよい近似になっていることが分かる.

Optimal control for stochastic Volterra integral equations with delay

Yushi Hamaguchi*

(Graduate School of Engineering Science, Osaka University)

This talk is based on our preprint [\[2\]](#). We investigate a general class of infinite horizon optimal control problems with the state dynamics given by

$$\begin{cases} X^u(t) = \varphi(t) + \int_0^t b(t, s, X^u(s), X^u(s - \delta), u(s)) ds + \int_0^t \sigma(t, s, X^u(s), X^u(s - \delta), u(s)) dW(s), \\ X^u(t) = \varphi(t), t \in [-\delta, 0]. \end{cases} \quad t \geq 0, \quad (1)$$

Here, $W(\cdot)$ is a one-dimensional Brownian motion, $u(\cdot)$ is a control process, $\varphi(\cdot)$ is a given adapted process called the free term, b and σ are vector-valued functions, and $\delta \geq 0$ is a constant which represents the length of the delay of the state. The state equation [\(1\)](#) is a stochastic Volterra integral equation (SVIE, for short) which has a “finite delay” of the form $X^u(s - \delta)$, and thus we call it a *stochastic delay Volterra integral equation* (SDVIE, for short). Our objective is to find a control process which minimizes the discounted cost functional

$$J_\lambda(u(\cdot)) := \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} h(t, X^u(t), X^u(t - \delta), u(t)) dt \right], \quad (2)$$

where h is a real-valued function called the running cost, and $\lambda > 0$ is a discount rate.

When $\delta = 0$, SDVIE [\(1\)](#) becomes a classical SVIE (without delay). Meanwhile, when the coefficients $b(t, s, x_1, x_2, u)$ and $\sigma(t, s, x_1, x_2, u)$ do not depend on the time-parameter t , and when the free term is of the form $\varphi(t) = \varphi(t \wedge 0)$, SDVIE [\(1\)](#) is reduced to a controlled stochastic delay differential equation (SDDE, for short)

$$\begin{cases} dX^u(t) = b(t, X^u(t), X^u(t - \delta), u(t)) dt + \sigma(t, X^u(t), X^u(t - \delta), u(t)) dW(t), t \geq 0, \\ X^u(t) = \varphi(t), t \in [-\delta, 0]. \end{cases}$$

More importantly, SDVIE [\(1\)](#) includes a class of controlled *fractional SDDE* of the form

$$\begin{cases} {}^C D_{0+}^\alpha X^u(t) = b(t, X^u(t), X^u(t - \delta), u(t)) + \sigma(t, X^u(t), X^u(t - \delta), u(t)) \frac{dW(t)}{dt}, t \geq 0, \\ X^u(t) = \varphi(t), t \in [-\delta, 0], \end{cases}$$

where ${}^C D_{0+}^\alpha$ denotes the Caputo fractional derivative of order $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$. Fractional differential systems are suitable tools to describe the dynamics of systems with memory effects and hereditary properties. There are many applications of fractional calculus in a variety of research fields including mathematical finance, physics, chemistry, biology, and other applied sciences. Recently, Zhang et al. [\[4\]](#) and Moghaddam et al. [\[3\]](#) studied fractional SDDEs (without control) and proved the existence and uniqueness of the solution. The analysis of stochastic control problems of fractional SDDEs is therefore an important topic, and this is a main motivation of our work.

*E-mail: hmgch2950@gmail.com

For the discounted control problem (1)–(2), we provide both necessary and sufficient conditions for optimality by means of Pontryagin’s maximum principle. An idea here is to “lift up” the dimension of the state process so that the auxiliary state equation becomes a classical SVIE (without delay), which was investigated in our previous paper [1]. In [1], we showed that the adjoint equation, which characterizes the optimal control, of discounted control problems for classical SVIEs becomes an *infinite horizon backward stochastic Volterra integral equation* (BSVIE, for short). Applying our previous results to the auxiliary state process, we show that the adjoint equation of the original problem (1)–(2) (including delay) becomes an *infinite horizon anticipated BSVIE* (ABSVIE, for short), which is a novel class of BSVIEs whose driver depends on some “anticipated terms”. The optimal control of the problem (1)–(2) is characterized by the infinite horizon ABSVIE, together with an optimality condition.

As an example of our general theory, we consider an infinite horizon linear–quadratic (LQ, for short) regulator problem for a fractional SDDE with constant coefficients. Specifically, we treat the case where the controlled state dynamics is described by a (one-dimensional) linear fractional SDDE

$$\begin{cases} {}^C D_{0+}^\alpha X^u(t) = bX^u(t - \delta) + cu(t) + \sigma \frac{dW(t)}{dt}, & t \geq 0, \\ X^u(t) = x_0, & t \in [-\delta, 0], \end{cases}$$

and the discounted cost functional is given by a quadratic functional of the state and control:

$$J_\lambda(u(\cdot)) = \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} \left\{ |X^u(t)|^2 + \frac{1}{\gamma} |u(t)|^2 \right\} dt \right].$$

Based on the maximum principle, we show that there exists a unique optimal control for this problem. Moreover, we obtain an explicit formula for the optimal control process of the following form:

$$(\text{optimal control}) = (\text{constant}) \times (\text{delayed optimal state}) + (\text{Gaussian process}),$$

which we call a *Gaussian state-feedback representation formula* for the optimal control. Here, the Gaussian process is a stochastic convolution of a deterministic function with respect to the Brownian motion $W(\cdot)$, and the function is determined via *linear Fredholm integral equations* depending only on the model parameters. The linear Fredholm integral equations can be solved by using a Fredholm resolvent of the kernel, and we get the above Gaussian state-feedback representation formula.

References

- [1] Y. Hamaguchi, Infinite horizon backward stochastic Volterra integral equations and discounted control problems, *ESAIM: Control Optim., Calc., Var.*, 2021, DOI:10.1051/cocv/2021098.
- [2] Y. Hamaguchi, On the maximum principle for optimal control problems of stochastic Volterra integral equations with delay, *preprint*, arXiv:2109.06092.
- [3] B. P. Moghaddam, L. Zhang, A. M. Lopes, J. A. Tenreiro Machado, and Z. S. Mostaghim. Sufficient conditions for existence and uniqueness of fractional stochastic delay differential equations. *Stochastics*, **92**(3), 379–396, 2020.
- [4] X. Zhang, P. Agarwal, Z. Liu, H. Peng, F. You, and Y. Zhu. Existence and uniqueness of solutions for stochastic differential equations of fractional-order $q > 1$ with finite delays. *Adv. Differ. Equ.*, 123, 2017.

Limit distributions for the discretization error of stochastic Volterra equations

Masaaki Fukasawa and Takuto Ugai

Graduate School of Engineering Science, Osaka University

The discretization of the stochastic differential equations (SDE) has been studied by many researchers for many years. Consider a standard SDE and its discretization:

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s, \quad t \in [0, T], \\ \hat{X}_t &= X_0 + \int_0^t b(\hat{X}_{\lfloor ns \rfloor/n})ds + \int_0^t \sigma(\hat{X}_{\lfloor ns \rfloor/n})dW_s, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

where b and σ are continuously differentiable functions whose derivatives being bounded and uniformly continuous. In the 1990s, the limit distribution of the scaled error $U^{(n)} = n^{-1/2}(X - \hat{X})$ was studied by Jacod, Kurtz and Protter; see Kurtz and Protter [3] or Jacod and Protter [2]. They proved that $(W, U^{(n)})$ converges in law to (W, U) as n tends to infinity, where U is the solution of the following SDE:

$$U_t = \int_0^t U_s(b'(X_s)ds + \sigma'(X_s)dW_s) - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \sigma'(X_s)\sigma(X_s)d\hat{W}_s$$

with \hat{W} being a standard Brownian motion independent of W .

The aim of our study is to extend their result to stochastic Volterra equations (SVE) which are represented by

$$X_t = X_0 + \int_0^t K(t-s)b(X_s)ds + \int_0^t K(t-s)\sigma(X_s)dW_s, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

where $K(t) = \frac{t^{H-1/2}}{\Gamma(H+1/2)}$, $H \in (0, 1/2)$. Likewise in the case of SDEs, let \hat{X} be the solution of the discretized SVE of (1), that is,

$$\hat{X}_t = X_0 + \int_0^t K(t-s)b(\hat{X}_{\lfloor ns \rfloor/n})ds + \int_0^t K(t-s)\sigma(\hat{X}_{\lfloor ns \rfloor/n})dW_s, \quad t \in [0, T].$$

We denote by C_0^0 the set of the continuous functions on $[0, T]$ vanishing at $t = 0$ and by $C_0^{0,\lambda}$ the set of the λ -Hölder continuous functions with the same property. Then the following theorem is proved, which is our main result.

Theorem 1. *Let $\epsilon \in (0, H)$. Then the process $U^{(n)} = n^H(X - \hat{X})$ stably converges in law in $C_0^{0,H-\epsilon}$ to a process U which is the unique continuous solution of the SVE*

$$U_t = \int_0^t K(t-s)U_s(b'(X_s)ds + \sigma'(X_s)dW_s) - \frac{1}{\sqrt{\Gamma(2H+2)\sin\pi H}} \int_0^t K(t-s)\sigma'(X_s)\sigma(X_s)d\hat{W}_s, \quad (2)$$

where \hat{W} is a standard Brownian motion independent of W .

To prove Theorem 1, we start with the following decomposition:

$$U_t^{(n)} \approx \int_0^t K(t-s)U_s^{(n)}(b'(\hat{X}_{\lfloor ns \rfloor/n})ds + \sigma'(\hat{X}_{\lfloor ns \rfloor/n})dW_s) + \int_0^t K(t-s)b'(\hat{X}_{\lfloor ns \rfloor/n})d\langle V^{(n)}, W \rangle_s + \int_0^t K(t-s)d\tilde{V}_s^{(n)}, \quad (3)$$

where $U^{(n)}$, $V^{(n)}$, and $\tilde{V}^{(n)}$ are defined as

$$U^{(n)} = n^H(X - \hat{X}), \quad V^{(n)} = n^H \int_0^\cdot (\hat{X}_s - \hat{X}_{\lfloor ns \rfloor/n})dW_s, \quad \tilde{V}^{(n)} = \int_0^\cdot \sigma'(\hat{X}_{\lfloor ns \rfloor/n})dV_s^{(n)}.$$

Remark that the difference between both sides of (3) converges to zero in $C_0^{0,H-\epsilon}$ for any $\epsilon \in (0, H)$ as n goes to infinity. We have the limits of the quadratic variation and covariation of $V^{(n)}$ and W .

Lemma 2. For all $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \langle V^{(n)}, V^{(n)} \rangle_t &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{in } L_1} \frac{1}{\Gamma(2H+2) \sin \pi H} \int_0^t \sigma(X_s)^2 ds, \\ \langle V^{(n)}, W \rangle_t &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{in } L_1} 0. \end{aligned}$$

Then Lemma 2 and the results of Jacod [1] lead us to specify the limit distribution of $V^{(n)}$ in Lemma 3.

Lemma 3. The process $V^{(n)}$ stably converges in law in C_0^0 to a continuous process V of the following form:

$$V = \frac{1}{\sqrt{\Gamma(2H+2) \sin \pi H}} \int_0^\cdot \sigma(X_s) d\hat{W}_s,$$

where \hat{W} is a standard Brownian motion independent of W , namely, $\langle W, \hat{W} \rangle = 0$.

The convergence of $\tilde{V}^{(n)}$ will be considered in Lemma 4. Some outcomes of Kurtz and Protter [4], the general results for the convergence of stochastic integrals in the Skorokhod topology, are used here.

Lemma 4. The process $\tilde{V}^{(n)}$ stably converges in law in C_0^0 to the process

$$\tilde{V} = \int_0^\cdot \sigma'(X_s) dV_s.$$

Regarding the stochastic integral of the fractional kernel K with respect to the process $\tilde{V}^{(n)}$ as a Riemann-Liouville fractional derivative, we can use the continuity of the derivative from $C_0^{0,\lambda}$ into $C_0^{0,\lambda-(H-1/2)}$ for $\lambda > 1/2 - H$ as in Lemma 7; see Samko, Kilbas, and Marichev [5]. We additionally construct a useful criterion of tightness in $C_0^{0,\lambda}$ as in Theorem 8. The weak convergence in C_0^0 of $V^{(n)}$ is obtained in Lemma 3, and then, Lemma 4 and Corollary 9 imply that the last term of (3) converges in law in the appropriate space. Moreover, we can show that the second integral of (3) tends weakly to zero in $C_0^{0,H-\epsilon}$. As a consequence, the tightness of $U^{(n)}$ in $C_0^{0,H-\epsilon}$ is obtained, and thus, together with the uniqueness of the solution U of (2), the desired weak convergence is shown.

Definition 5. Let $f \in C_0^{0,\lambda}$ and $\alpha = 1/2 - H$. We define the integral operator \mathcal{J}^α as

$$(\mathcal{J}^\alpha f)(t) := K(t)f(t) - \int_0^t (f(t) - f(s))K'(t-s)ds.$$

Proposition 6. Let Y be a process such that the stochastic integral $\int_0^t K(t-s)dY_s$ is well defined. Then the integral is almost surely represented by \mathcal{J}^α as

$$\int_0^t K(t-s)dY_s = (\mathcal{J}^\alpha Y)(t).$$

Lemma 7 (Samko, Kilbas, and Marichev [5]). The operator \mathcal{J}^α is bounded (continuous) from $C_0^{0,\lambda}$ into $C_0^{0,\lambda-\alpha}$.

Theorem 8. Let $\{Y^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of $C_0^{0,\alpha}$ -valued random variables. If $\mathbb{E}[\|Y^{(n)}\|_{C_0^{0,\alpha}}]$ is bounded uniformly in n , the sequence $\{Y^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ is tight in $C_0^{0,\beta}$ for $0 < \beta < \alpha$.

Corollary 9. Let $Y^{(n)}$ be a stochastic process which converges to a process Y weakly in C_0^0 as n goes to infinity. If $Y^{(n)}$ satisfies $\mathbb{E}[\|Y^{(n)}\|_{C_0^{0,\alpha}}] \leq C$ for some C uniformly in n , it converges to Y weakly in $C_0^{0,\beta}$ for any positive $\beta < \alpha$.

References

- [1] J. Jacod. On continuous conditional gaussian martingales and stable convergence in law. In *Seminaire de Probabilités XXXI*, pages 232–246. Springer, 1997.
- [2] J. Jacod and P. E. Protter. Asymptotic error distributions for the euler method for stochastic differential equations. *The Annals of Probability*, 26(1):267 – 307, 1998.
- [3] T. G. Kurtz and P. E. Protter. Wong-zakai corrections, random evolutions, and simulation schemes for sde's. In E. Mayer-Wolf, E. Merzbach, and A. Shwartz, editors, *Stochastic analysis : liber amicorum for Moshe Zakai*, pages 331–346. Academic Press, 1991.
- [4] T. G. Kurtz and P. E. Protter. Weak convergence of stochastic integrals and differential equations. In D. Talay and L. Tubaro, editors, *Probabilistic Models for Nonlinear Partial Differential Equations*, pages 1–41. Springer, 1996.
- [5] S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

Bessel 引越過程の構成と諸性質

築島 瞬 (東京都立大学)

共同研究者：石谷 謙介 (東京都立大学)

1 概要

本講演では、時刻 1 で初めて所与の値に到達する δ 次元 Bessel 過程を、 δ 次元 Bessel 引越過程とよび、その構成方法と諸性質を紹介する。

δ 次元 Bessel 過程は、1 次元拡散過程であり、 δ が自然数のとき δ 次元 Brown 運動の原点からの距離とその法則が一致する。 δ 次元 Bessel 過程については、これまで様々な研究がなされており、[1] では δ 次元 Bessel 橋の最大値分布の具体表示が得られており、[2] では δ 次元 Bessel 過程の first hitting time の分布の具体表示が得られている。

2 準備

以下では、 $\delta > 0$ とし、 $\nu := \delta/2 - 1$ とおく。 $0 \leq a < b$ に対し、 a 出発の δ 次元 Bessel 過程 $R^a = \{R^a(t)\}_{t \geq 0}$ の b への first hitting time を $\tau_{a,b}$ で表す：

$$\tau_{a,b} := \inf\{r \geq 0 \mid R^a(r) = b\}.$$

$0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$ に対し、区間 $[t_1, t_2]$ 上の連続関数の空間を $C([t_1, t_2], \mathbb{R})$ 、 $[t_1, t_2]$ 上の a 出発かつ b 到達の δ 次元 Bessel 橋を $r_{[t_1, t_2]}^{a \rightarrow b} = \{r_{[t_1, t_2]}^{a \rightarrow b}(t)\}_{t \in [t_1, t_2]}$ で表す (なお、 $t_1 = 0, t_2 = 1$ のとき $r^{a \rightarrow b}$ と略記する)。

$\eta > 0$ と $0 \leq s < t \leq 1$, $x, y \in [0, \eta]$ に対して、次の記号を定義する：

$$\begin{aligned} q_1^{(\eta)}(s, x, t, y) &:= \frac{P(R^x(t-s) \in dy)}{dy} P\left(\max_{u \in [s, t]}(r_{[s, t]}^{x \rightarrow y}(u)) \leq \eta\right) \\ &= 2y \left(\frac{y}{x}\right)^\nu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_\nu(xj_{\nu, n}/\eta) J_\nu(yj_{\nu, n}/\eta)}{\eta^2 J_{\nu+1}^2(j_{\nu, n})} \exp\left(-\frac{j_{\nu, n}^2}{2\eta^2}(t-s)\right), \\ q_2^{(\eta)}(t, y) &:= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} q_1^{(\eta+\varepsilon)}(0, y, t, \eta) = \frac{P(R^y(t) \in d\eta)}{d\eta} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} P\left(\max_{u \in [0, t]}(r_{[0, t]}^{y \rightarrow \eta}(u)) \leq \eta + \varepsilon\right) \\ &= 2 \left(\frac{\eta}{y}\right)^\nu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_{\nu, n} J_\nu(yj_{\nu, n}/\eta)}{\eta^2 J_{\nu+1}^2(j_{\nu, n})} \exp\left(-\frac{j_{\nu, n}^2}{2\eta^2}t\right). \end{aligned}$$

ただし、 $J_\nu(z)$ は第 1 種 Bessel 関数、 $0 < j_{\nu, 1} < j_{\nu, 2} < \dots$ は $J_\nu(z)$ の零点である。

3 主結果

a 出発 ($a \geq 0$) かつ時刻 1 で初めて b ($b > a$) に到達する δ 次元 Bessel 過程を、以下では 2 通りの方法で構成する。まず、 δ 次元 Bessel 過程の first hitting time を用いた定式化は次の通りである：

定理 1. $0 \leq a < b$ とする. このとき, 連続 Markov 過程 $H^{a \rightarrow b} = \{H^{a \rightarrow b}(t)\}_{t \in [0,1]}$ で, 次をみたすものが存在する: $0 < s < t < 1$ と $x, y \in (0, b)$ に対し,

$$P(H^{a \rightarrow b}(t) \in dy) = P(R^a(t) \in dy \mid \tau_{a,b} = 1) = \frac{q_1^{(b)}(0, a, t, y) q_2^{(b)}(1-t, y)}{q_2^{(b)}(1, a)} dy,$$

$$P(H^{a \rightarrow b}(t) \in dy \mid H^{a \rightarrow b}(s) = x) = P(R^a(t) \in dy \mid R^a(s) = x, \tau_{a,b} = 1)$$

$$= \frac{q_1^{(b)}(s, x, t, y) q_2^{(b)}(1-t, y)}{q_2^{(b)}(1-s, x)} dy.$$

$H^{a \rightarrow b} = \{H^{a \rightarrow b}(t)\}_{t \in [0,1]}$ を, a 出発かつ b 到達の δ 次元 Bessel 引越過程 (Bessel house-moving) とよぶ. Bessel 引越過程は, 条件付き Bessel 橋の弱収束極限としても構成可能であり, 以下ではこのことを説明する. まず, $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$ に対して

$$K_{[t_1, t_2]}^-(b + \eta) := \{w \in C([t_1, t_2], \mathbb{R}) \mid w(t) \leq b + \eta, t_1 \leq t \leq t_2\}$$

とおく. このとき, 条件付き Bessel 橋の弱収束極限としての定式化は次の通りである:

定理 2. $0 \leq a < b$ とする. このとき,

$$r^{a \rightarrow b} \big|_{K_{[0,1]}^-(b+\eta)} \xrightarrow{\mathcal{D}} H^{a \rightarrow b} \quad (\eta \downarrow 0)$$

が成り立つ.

なお, $\delta = 3$ の場合は, [3] において定理 2 が得られている.

以上で, δ 次元 Bessel 引越過程の 2通りの構成方法を紹介した. 最後に, Bessel 引越過程のパスの分解公式を紹介する. そのためにまず, $w_1 \in C([t_1, t], \mathbb{R})$ と $w_2 \in C([t, t_2], \mathbb{R})$ が $w_1(t) = w_2(t)$ をみたすとき, $w_1 \oplus_t w_2 \in C([t_1, t_2], \mathbb{R})$ を次式で定義する:

$$(w_1 \oplus_t w_2)(s) := \begin{cases} w_1(s), & s \in [t_1, t], \\ w_2(s), & s \in [t, t_2] \end{cases}.$$

このとき, Bessel 引越過程のパスの分解公式は次の通りである.

定理 3. $0 \leq a < b$ とする. $C([0, 1], \mathbb{R})$ 上の任意の有界連続関数 F に対し, 次式

$$E[F(H^{a \rightarrow b})] = \int_0^b E\left[F(r_{[0,t]}^{a \rightarrow y} \big|_{K_{[0,t]}^-(b)} \oplus_t H_{[t,1]}^{y \rightarrow b}\right] P(H^{a \rightarrow b}(t) \in dy) \quad (0 < t < 1)$$

が成立する. ただし, $r_{[0,t]}^{a \rightarrow y} \big|_{K_{[0,t]}^-(b)}$ と $H_{[t,1]}^{y \rightarrow b}$ は独立であるとする.

なお, このパスの分解公式を証明するためには, 定理 2 の構成方法が必要となる.

参考文献

- [1] J. Pitman and M. Yor: *The law of the maximum of bessel bridge*, Electronic Journal of Probability **15** (1999), 1–35.
- [2] Y. Hamana and H. Matsumoto: *The probability densities of the first hitting times of Bessel processes*, Trans. Amer. Math. Soc., **365** (2013), 5237–5257.
- [3] D. Hatakenaka, K. Ishitani and K. Suzuki: *On the construction of Brownian house-moving and its properties*, preprint.
- [4] D. Revuz and M. Yor: *Continuous martingales and Brownian motion*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1999, 3rd ed.

Brown 引越過程の構成と諸性質

石谷 謙介 (東京都立大学)

1 概要

本講演では、出発点と到達点の間に留まる 1 次元 Brown 橋を、Brown 引越過程とよび、その構成方法と諸性質を紹介する。

条件付き確率過程の弱収束については、これまで様々な研究がなされている。例えば、Durrett, Iglehart and Miller [3] では、0 出発の 1 次元標準 Brown 運動を正に条件付けると Brownian meander に弱収束すること、および 0 出発で 0 到達の 1 次元 Brown 橋を正に条件付けると Brownian excursion に弱収束すること等が示されている。

2 準備

$s > 0$ に対し、 $n_s(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(-\frac{x^2}{2s}\right)$ とおく。また、 $\eta > 0$ と $r > 0$ および $t > s > 0$ に対し、次の記号を定義する：

$$J_1^{(\eta)}(r, z) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2(z + 2k\eta)}{r} n_r(z + 2k\eta), \quad J_2^{(\eta)}(r, z) := J_1^{(\eta)}(r, \eta - z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2(\eta - z + 2k\eta)}{r} n_r(\eta - z + 2k\eta),$$

$$J_3^{(\eta)}(s, x, t, y) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} (n_{t-s}(y - x + 2k\eta) - n_{t-s}(y + x + 2k\eta)),$$

$$J_4^{(\eta)}(r, z) := \frac{\partial}{\partial \eta} J_1^{(\eta)}(r, z) = 4 \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \left(\frac{1}{r} - \frac{(z + 2k\eta)^2}{r^2} \right) n_r(z + 2k\eta),$$

$$J^{(\eta)}(z) := J_4^{(\eta)}(1, z) = 4 \sum_{k=-\infty}^{\infty} k (1 - (z + 2k\eta)^2) n_1(z + 2k\eta).$$

3 主結果

以下では、 $b > 0$ とする。まず、出発点 0 と到達点 b の間に留まる 1 次元 Brown 橋を、条件付き Brown 橋の弱収束極限として構成すると次の通りである：

定理 1. $B^{0 \rightarrow b}|_{K(-\varepsilon, b+\varepsilon)} = \{B^{0 \rightarrow b}|_{K(-\varepsilon, b+\varepsilon)}(t)\}_{t \in [0, 1]}$ は、 $[-\varepsilon, b + \varepsilon]$ に値をとるように条件付けられた $[0, 1]$ 上の 0 出発 b 到達の 1 次元 Brown 橋とする。このとき、 $[0, b]$ に値をとる連続 Markov 過程 $H^{0 \rightarrow b} = \{H^{0 \rightarrow b}(t)\}_{t \in [0, 1]}$ で、

$$B^{0 \rightarrow b}|_{K(-\varepsilon, b+\varepsilon)} \xrightarrow{D} H^{0 \rightarrow b}, \quad (\varepsilon \downarrow 0)$$

をみtasもの存在し、推移密度関数は次で与えられる： $0 < s < t < 1$ と $x, y \in (0, b)$ に対し、

$$P(H^{0 \rightarrow b}(t) \in dy) = \frac{J_1^{(b)}(t, y) J_2^{(b)}(1 - t, y)}{J^{(b)}(b)} dy,$$

$$P(H^{0 \rightarrow b}(t) \in dy | H^{0 \rightarrow b}(s) = x) = \frac{J_2^{(b)}(1 - t, y) J_3^{(b)}(s, x, t, y)}{J_2^{(b)}(1 - s, x)} dy.$$

この $H^{0 \rightarrow b} = \{H^{0 \rightarrow b}(t)\}_{t \in [0, 1]}$ を、0 出発 b 到達の Brown 引越過程 (Brownian house-moving) とよぶ。次に、Brown 引越過程は、条件付き 3 次元 Bessel 橋の弱収束極限としても構成可能であり、その構成方法は次の通りである：

定理 2. $r^{0 \rightarrow b}|_{K^-(b+\varepsilon)} = \{r^{0 \rightarrow b}|_{K^-(b+\varepsilon)}(t)\}_{t \in [0,1]}$ は, $[0, b + \varepsilon]$ に値をとるように条件付けられた $[0, 1]$ 上の 0 出発 b 到達の 3 次元 Bessel 橋とする. このとき,

$$r^{0 \rightarrow b}|_{K^-(b+\varepsilon)} \xrightarrow{D} H^{0 \rightarrow b}, \quad (\varepsilon \downarrow 0)$$

が成り立つ.

以上で, Brown 引越過程の 2 通りの構成方法を紹介した. 最後に, Brown 引越過程のパスの分解公式を紹介する. そのためにまず, $w_1 \in C([0, t], \mathbb{R})$ と $w_2 \in C([t, 1], \mathbb{R})$ が $w_1(t) = w_2(t)$ をみたすとき, $w_1 \oplus_t w_2 \in C([0, 1], \mathbb{R})$ を次式で定義する:

$$(w_1 \oplus_t w_2)(s) := \begin{cases} w_1(s), & s \in [0, t] \\ w_2(s), & s \in [t, 1] \end{cases}$$

このとき, Brown 引越過程のパスの分解公式は次の通りである.

定理 3. $C([0, 1], \mathbb{R})$ 上の任意の有界連続関数 F に対し, 次式

$$E[F(H^{0 \rightarrow b})] = \int_0^b E\left[F\left(r_{[0,t]}^{0 \rightarrow y}|_{K_{[0,t]}^-(b)} \oplus_t (b - r_{[t,1]}^{\leftarrow 0 \rightarrow b-y}|_{K_{[t,1]}^-(b)})\right)\right] P(H^{0 \rightarrow b}(t) \in dy), \quad 0 < t < 1, \quad (3.1)$$

が成立する. ただし, $r_{[0,t]}^{0 \rightarrow y}|_{K_{[0,t]}^-(b)} = \{r_{[0,t]}^{0 \rightarrow y}|_{K_{[0,t]}^-(b)}(s)\}_{s \in [0,t]}$ は, $[0, b]$ に値をとるように条件付けられた “[0, t] 上の 0 出発 y 到達の 3 次元 Bessel 橋” である. また, $r_{[t,1]}^{\leftarrow 0 \rightarrow b-y}|_{K_{[t,1]}^-(b)} = \{r_{[t,1]}^{\leftarrow 0 \rightarrow b-y}|_{K_{[t,1]}^-(b)}(s)\}_{s \in [t,1]}$ は,

$$r_{[t,1]}^{\leftarrow 0 \rightarrow b-y}|_{K_{[t,1]}^-(b)}(s) = r_{[t,1]}^{0 \rightarrow b-y}|_{K_{[t,1]}^-(b)}(t + 1 - s), \quad s \in [t, 1]$$

と定義され, $[0, b]$ に値をとるように条件付けられた “[t, 1] 上の 0 出発 $b - y$ 到達の 3 次元 Bessel 橋” を時間反転させた確率過程である. なお, (3.1) に表れるこの 2 つの確率過程 $r_{[0,t]}^{0 \rightarrow y}|_{K_{[0,t]}^-(b)}$ と $r_{[t,1]}^{\leftarrow 0 \rightarrow b-y}|_{K_{[t,1]}^-(b)}$ は独立であるとする.

なお, Brown 引越過程のサンプルパスを効率的に生成するためには, このパスの分解公式が必要となる.

参考文献

- [1] P. Billingsley: Convergence of Probability Measures, Wiley New York, 1968.
- [2] Z. Ciesielski and S. J. Taylor: *First passage times and sojourn times for Brownian motion in space and the exact Hausdorff measure of the sample path*, Trans. Amer. Math. Soc. **103** (1962), 434–450.
- [3] R. T. Durrett, D. L. Iglehart and D. R. Miller: *Weak convergence to Brownian meander and Brownian excursion*, The Annals of Probability. **5** (1977), 117–129.
- [4] I. Karatzas and S. E. Shreve: Brownian motion and Stochastic calculus, Springer, Science+Business Media, Inc. in 1998, 2nd ed.
- [5] J. Pitman and M. Yor: *A decomposition of Bessel bridges*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **59** (1982), 425–457.
- [6] J. Pitman and M. Yor: *The law of the maximum of Bessel bridge*, Electronic Journal of Probability **15** (1999), 1–35.
- [7] D. Revuz and M. Yor: Continuous martingales and Brownian motion, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1999, 3rd ed.

ランダム行列とその主小行列の固有値分布

藤江 克徳 (北海道大学)*

概要

In this talk, we observe a concentration phenomenon on the empirical eigenvalue distribution (EED) of the principal submatrix in a random hermitian matrix whose distribution is invariant under unitary conjugacy; for example, this class includes GUE (Gaussian Unitary Ensemble) and Wishart matrices. More precisely, if the EED of the whole matrix converges to some deterministic probability measure \mathbf{m} , then the difference of rescaled EEDs of the whole matrix and of its principal submatrix concentrates at the Rayleigh measure (in general, a Schwartz distribution) associated with \mathbf{m} by the Markov–Krein correspondence. For the proof, we use the moment method with Weingarten calculus and free probability. At some stage of calculations, the proof requires a relation between the moments of the Rayleigh measure and free cumulants of \mathbf{m} . This formula is more or less known, but we provide a different proof by observing a combinatorial structure of non-crossing partitions. This talk is based on joint works [3] with Takahiro Hasebe in Hokkaido university.

本講演ではユニタリ共役不変なランダムエルミート行列の主小行列, その固有値分布の集中現象についてお話しする. なお本講演は長谷部高広氏との共同研究 [3] に基づく. 以下では講演の内容を簡単に紹介する.

1. Introduction & Main Results

A_N を N 次ランダムエルミート行列とする. 任意のユニタリ行列 U_N に対して $U_N^* A_N U_N$ と A_N の分布が等しいとき A_N はユニタリ共役不変であるという. 一般にエルミート行列 $A_N = (a_{ij})_{i,j=1}^N$ の主小行列 $\tilde{A}_N = (a_{ij})_{i,j=1}^{N-1}$ もまたエルミート行列になるが, それぞれの固有値を大きさ順に番号づけ $\{\lambda_i\}_{i=1}^N, \{\tilde{\eta}_j\}_{j=1}^{N-1}$ と表したとき次の不等式が成り立つ (Cauchy interlacing theorem):

$$\lambda_i \leq \tilde{\eta}_i \leq \lambda_{i+1}, \quad (i = 1, \dots, N-1).$$

Interlace する数列 (より一般に Rayleigh 測度) については Kerov による Markov–Krein 対応の研究がよく知られている [5]. Kerov は関連する研究の一つとして Wigner 行列を Haar 直交行列について共役をとったものとその主小行列の固有値分布の関係を調べ, サイズ N が大きくなっていくと主小行列の固有値分布が元の行列の固有値分布から Markov–Krein 対応によって得られる確率分布に収束していくという結果を得た [4]. また, Bufetov は Wigner, Wishart 行列の両クラスについて同様の結果が成り立つことを示した [1]. おそらくこれらの結果から Goel–Yao はユニタリ共役不変なランダムエルミート行列のクラスについても同様の結果が成り立つことを予想し [2] において次の主張を提示した.

* 〒 060-0810 北海道札幌市北区北 10 条西 8 丁目 北海道大学大学院理学院数学専攻
e-mail: kfujie@eis.hokudai.ac.jp

定理 1. A_N をユニタリ共役不変なランダムエルミート行列, \mathbf{m}_N を A_N の経験固有値分布とする. \mathbf{m}_N がある確率測度 \mathbf{m} に確率弱収束するとき, A_N とその主小行列 \tilde{A}_N から作られる Rayleigh 測度 $\tilde{\tau}_N = \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i} - \sum_{j=1}^{N-1} \delta_{\tilde{\eta}_j}$ は \mathbf{m} から Markov–Krein 変換によって得られる Rayleigh 測度 τ に確率弱収束する.

注意 2. この定理はランダム行列理論における folklore—つまり正しいことをほとんどの専門家が認識していたがだれも証明を知らない定理—だったらしい.

2. Overview of the Proof

我々は問題の主張を整理し, モーメントを使用できる条件下で主張が正しいことを証明した. 解決の鍵になったのは Weingarten calculus における次の公式である:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \circ \text{Tr}_\sigma [A_1 U_N B_1 U_N^*, \dots, A_k U_N B_k U_N^*] \\ = \sum_{\substack{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathfrak{S}_k \\ \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = \sigma}} \text{Tr}_{\sigma_1} [A_1, \dots, A_k] \text{Tr}_{\sigma_2} [B_1, \dots, B_k] \text{Wg}(\sigma_3, N), \end{aligned}$$

ここで, A_i, B_i ($i = 1, \dots, k$) は $N \times N$ 行列で $\sigma \in \mathfrak{S}_k$.

この公式を用いて計算を進めていくと次の結果が示唆される:

定理 3. \mathbf{m} を確率測度で τ をその Rayleigh 測度とする. このとき

$$M_k(\tau) = \sum_{\rho \in \text{NC}(k)} (k + 1 - |\rho|) R_\rho(\mathbf{m})$$

が成り立つ. ここで, $\text{NC}(k)$ は $\{1, \dots, k\}$ の非交差分割で $R_\rho(\mathbf{m})$ は \mathbf{m} の自由キュムラントである.

参考文献

- [1] A. Bufetov, “Kerov’s interlacing sequences and random matrices”, Journal of Mathematical Physics, Volume 54, 2013.
- [2] G. Goel and A. Yao, “A quantized analogue of the Markov-Krein correspondence”, arXiv preprint arXiv:2011.10724, 2020
- [3] K. Fujie and T. Hasebe, The spectra of principal submatrices in rotationally invariant hermitian random matrices and the Markov-Krein correspondence, ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat., to appear. arXiv:2103.09025
- [4] S. Kerov, “Asymptotics of the separation of roots of orthogonal polynomials”, St. Petersburg Mathematical Journal, Volume 5, 925-941, 1994.
- [5] S. Kerov, “Interlacing measures”, American Mathematical Society Translations, 35-84, 1998.

Hausdorff dimension of collision times in one-dimensional log-gases

Sergio Andraus

The University of Tokyo

Joint work with Nicole Hufnagel, TU Dortmund

We consider the interacting particle systems in one dimension described by Dyson's model and the Wishart-Laguerre processes, in which there is a fixed number of particles and the coupling constant of interaction β is less than unity. In this case, it is well-known that collisions occur between the particles almost surely in the sense that the first collision time is finite with probability one, whereas the first collision time is almost surely infinite when β is greater than or equal to one [D]. In spite of this fact, the set of collision times is known to have Lebesgue measure zero [CL], which means that the stochastic differential equations that describe these systems have unique strong solutions in spite of the fact that their drift terms diverge whenever a collision occurs.

A puzzling aspect of the collision times set is that, for the Dyson model of two particles, one can show that collisions occur infinitely often after they happen for the first time [K]. This is because the two-particle case can be reduced to the well-known Bessel process, and the set of collision times of the former corresponds to the returning times to the origin of the latter. It turns out that these characteristics are explained by the fact that the self-similarity enjoyed by the Bessel processes implies that its set of return times to the origin has fractal structure [LX]. In this work, we extend this analysis to an arbitrary and fixed number of particles in both the Dyson model and the Wishart Laguerre processes, and we identify the Hausdorff dimension of collision times as an appropriate object to characterize this behavior by extending the techniques of [LX] to non-compact returning sets.

This work is supported by JSPS Kakenhi grant number 19K14617.

References

- [CL] E. Cépa and D. Lépingle, *Probab. Theory Relat. Fields* **107** (1997) 429 – 449
- [D] N. Demni, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série I* **347** (2009) 1125 – 1128
- [K] J. Kent, *Ann. Prob.* **6** (1978) 760 – 770
- [LX] L. Liu and Y. Xiao, *Probability and Mathematical Statistics* **18** (1998) 01

Mixing time and simulated annealing for the stochastic cellular automata, and beyond

Akira Sakai¹

There are many real-life situations where we must choose one option among extremely many, as quickly and optimally as possible. Such combinatorial optimization problems are ubiquitous and possibly quite hard to solve them fast. One approach to find an optimal solution to a given problem is to translate it into an Ising Hamiltonian on a finite graph $G = (V, E)$ with no multi- or self-edges and find a ground state that corresponds to an optimal solution.

Given a system of spin-spin couplings $\mathbf{J} = \{J_{x,y}\}_{\{x,y\} \in E}$ (with $J_{x,y} = 0$ if $\{x,y\} \notin E$) and external magnetic fields $\mathbf{h} = \{h_x\}_{x \in V}$, the Ising Hamiltonian of a spin configuration $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x\}_{x \in V} \in \Omega \equiv \{\pm 1\}^V$ is defined as

$$H(\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{2} \sum_{x,y \in V} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y - \sum_{x \in V} h_x \sigma_x. \quad (1)$$

Let $\text{GS} = \arg \min_{\boldsymbol{\sigma} \in \Omega} H(\boldsymbol{\sigma})$, which is the set of spin configurations where the Hamiltonian attains its minimum value. A standard method to find an element from GS is to use a Markov chain Monte Carlo (MCMC) to sample the Gibbs distribution $\pi_\beta^G(\boldsymbol{\sigma}) \propto e^{-\beta H(\boldsymbol{\sigma})}$ at the inverse temperature $\beta \geq 0$, which attains its highest peaks on GS. There are several MCMCs that can generate the Gibbs distribution as the equilibrium distribution. One of them is the Glauber dynamics, which is defined by the transition probability

$$P_\beta^G(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}^x) = \frac{1}{|V|} \frac{w_\beta^G(\boldsymbol{\sigma}^x)}{w_\beta^G(\boldsymbol{\sigma}) + w_\beta^G(\boldsymbol{\sigma}^x)} \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{|V|} \frac{e^{-\beta \tilde{h}_x(\boldsymbol{\sigma}) \sigma_x}}{2 \cosh(\beta \tilde{h}_x(\boldsymbol{\sigma}))}, \quad (2)$$

where $(\boldsymbol{\sigma}^x)_y = (-1)^{\delta_{x,y}} \sigma_y$ and $\tilde{h}_x(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{y \in V} J_{x,y} \sigma_y + h_x$; if the Hamming distance between $\boldsymbol{\sigma}$ and $\boldsymbol{\tau}$ is bigger than 1, $P_\beta^G(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})$ is defined to be zero. Since P_β^G is aperiodic, irreducible and reversible with respect to π_β^G , the Glauber dynamics has a unique equilibrium distribution π_β^G . However, since the number of spin-flips per update is at most one, it is potentially slow and may not be so useful in practice. It has been longed for a way to update many spins at once, independently of each other.

One such MCMC is in a particular class of probabilistic cellular automata [1, 3]. Since the abbreviation PCA has long been used for principal component analysis in statistics, we would rather call it the stochastic cellular automata (SCA). It is defined by the doubled Hamiltonian with the pinning parameters $\mathbf{q} = \{q_x\}_{x \in V}$ as

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) &= -\frac{1}{2} \sum_{x,y \in V} J_{x,y} \sigma_x \tau_y - \frac{1}{2} \sum_{x \in V} h_x (\sigma_x + \tau_x) - \frac{1}{2} \sum_{x \in V} q_x \sigma_x \tau_x \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{x \in V} (\tilde{h}_x(\boldsymbol{\sigma}) + q_x \sigma_x) \tau_x - \frac{1}{2} \sum_{x \in V} h_x \sigma_x. \end{aligned} \quad (3)$$

¹Faculty of Science, Hokkaido University. <https://orcid.org/0000-0003-0943-7842>

Let

$$w_{\beta, \mathbf{q}}^{\text{SCA}}(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{\boldsymbol{\tau}} e^{-\beta \tilde{H}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})} \stackrel{(3)}{=} \prod_{x \in V} 2e^{\frac{\beta}{2} h_x \sigma_x} \cosh\left(\frac{\beta}{2}(\tilde{h}_x(\boldsymbol{\sigma}) + q_x \sigma_x)\right), \quad (4)$$

and define the SCA transition probability as

$$P_{\beta, \mathbf{q}}^{\text{SCA}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = \frac{e^{-\beta \tilde{H}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})}}{w_{\beta, \mathbf{q}}^{\text{SCA}}(\boldsymbol{\sigma})} \stackrel{(4)}{=} \prod_{x \in V} \frac{e^{\frac{\beta}{2}(\tilde{h}_x(\boldsymbol{\sigma}) + q_x \sigma_x) \tau_x}}{2 \cosh\left(\frac{\beta}{2}(\tilde{h}_x(\boldsymbol{\sigma}) + q_x \sigma_x)\right)}. \quad (5)$$

Because of this product form, all spins are updated at once, independently of each other. Since \tilde{H} is symmetric, $P_{\beta, \mathbf{q}}^{\text{SCA}}$ is reversible with respect to $\pi_{\beta, \mathbf{q}}^{\text{SCA}}(\boldsymbol{\sigma}) \propto w_{\beta, \mathbf{q}}^{\text{SCA}}(\boldsymbol{\sigma})$, which is different from the Gibbs distribution, so we cannot naively use it to search for an element in GS. However, since $\tilde{H}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) = H(\boldsymbol{\sigma}) - \frac{1}{2} \sum_{x \in V} q_x$, the total-variation distance between $\pi_{\beta, \mathbf{q}}^{\text{SCA}}$ and π_{β}^{G} tends to zero as $\min_{x \in V} q_x \uparrow \infty$. We take $\min_{x \in V} q_x$ large enough (e.g., $= \lambda/2$, where λ is a half of the largest eigenvalue of the matrix $[-J_{x,y}]_{V \times V}$) to ensure that \tilde{H} attains its minimum values on the diagonal entries:

$$\min_{\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \Omega} \tilde{H}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = \min_{\boldsymbol{\sigma} \in \Omega} \tilde{H}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}), \quad \arg \min_{\boldsymbol{\sigma} \in \Omega} \tilde{H}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) = \text{GS}. \quad (6)$$

At the symposium, I will explain the following results from the joint paper [2]:

- (i) If the temperature is sufficiently high (depending only on \mathbf{J} and \mathbf{q}), the mixing time for the time-homogeneous SCA is at most of order $\log |V|$, which is much smaller than that for the Glauber dynamics under zero magnetic field.
- (ii) If the temperature drops in time as $\beta_n \propto \log n$, then the time-inhomogeneous SCA weakly converges to the uniform distribution π_{∞}^{G} on GS. The sequence $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ is a standard cooling schedule in simulated annealing applied to single-spin dynamics.

I will also show some numerical results on the so-called ε -SCA, which is introduced to try to improve performance of the SCA, and explain the current status of the ongoing joint work with Fukushima-Kimura, Kamijima, Kawamoto, Kawamura and Noda.

References

- [1] P. Dai Pra, B. Scoppola and E. Scoppola. Sampling from a Gibbs measure with pair interaction by means of PCA. *J. Stat. Phys.*, **149** (2012): 722–737.
- [2] B.H. Fukushima-Kimura, S. Handa, K. Kamakura, Y. Kamijima and A. Sakai. Mixing time and simulated annealing for the stochastic cellular automata. Submitted. [arXiv:2007.11287](https://arxiv.org/abs/2007.11287)
- [3] B. Scoppola and A. Troiani. Gaussian mean field lattice gas. *J. Stat. Phys.*, **170** (2018): 1161–1176.

KPZ モデルと有限温度フェルミオン点過程: 歪 RSK ダイナミクスによるアプローチ

今村 卓史 (千葉大学), Matteo Mucciconi (University of Warwick), 笹本 智弘 (東京工業大学)

相互作用確率粒子系の中には背後に量子可積分性に関連した代数的な構造を持つものがあり, それを利用することによって粒子の位置やカレントの分布関数の具体形を求めることができる. このような研究は近年盛んに行われ, 可積分確率 (integrable probability) と呼ばれるようになった. 本講演では, Matteo Mucciconi 氏 (University of Warwick) と笹本 智弘氏 (東京工業大学) との共同研究によって得られた可積分確率に関する最近の結果 [5] についてお話しする.

以下で, $a_i, b_j, q \in [0, 1), i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ とし \mathcal{P} を分割全体の集合とする. また q -Pochhammer 記号を $(a; q)_n := \prod_{j=1}^n (1 - aq^{j-1}), (a; q)_\infty := \prod_{j=1}^\infty (1 - aq^{j-1})$ で表す.

まず \mathcal{P} 上の 2 種類の確率測度を導入する.

定義 1. (q -Whittaker 測度 [3]) $\mu \in \mathcal{P}$ に対して,

$$M_{qW}(\mu) = P_\mu(a_1, \dots, a_N) Q_\mu(b_1, \dots, b_M) / Z_{qW}$$

によって定義される \mathcal{P} 上の確率測度を q -Whittaker 測度と呼ぶ. ただし P_μ, Q_μ は q -Whittaker 関数 (Macdonald 対称多項式 [6] の 2 つのパラメータ q, t のうち $t = 0$ としたもの) であり, $Z_{qW} = \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^M \frac{1}{(a_i b_j; q)_\infty}$ である.

定義 2. (周期的シューア測度 [2]) $\lambda \in \mathcal{P}$ に対して,

$$M_{pS}(\lambda) = \sum_{\substack{\rho \in \mathcal{P} \\ \rho(\subset \lambda)}} q^{|\rho|} s_{\lambda/\rho}(a_1, \dots, a_N) s_{\lambda/\rho}(b_1, \dots, b_M) / Z_{pS}$$

によって定義される \mathcal{P} 上の確率測度を周期的シューア測度と呼ぶ. ただし $s_{\lambda/\rho}$ は歪 Schur 関数 [6], $Z_{pS} = \frac{1}{(q; q)_\infty} \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^M \frac{1}{(a_i b_j; q)_\infty}$ である.

q -Whittaker 測度は Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) クラスに属する確率過程と関係することが知られている [3]. 例えば μ_1 を定義 1 の $M_{qW}(\mu)$ で分布するランダムな分割 μ の第一成分とし, $X_1(M)$ を q -pushTASEP と呼ばれる粒子数が N 個の相互作用確率粒子系の先頭の粒子の時刻 M における位置とする. このとき $\mu_1 \stackrel{d}{=} X_1(M)$, つまり μ_1 と $X_1(M)$ は同分布であることが知られている. さらに最近の可積分確率の研究で, Bethe 仮説等の量子可積分系の手法を用いて様々 KPZ モデルにおける行列式公式が明らかになっているが, かなり複雑な計算を要する上行列式構造の確率論的意味もよくわからない状況であった.

他方周期的 Schur 測度は適当なランダムシフトによって行列式点過程となることが [2] によって示されている. また有限温度自由フェルミオンを記述することも知られている [1].

本講演の主結果は以下のとおりであり, 上の 2 つの確率測度の関係を表している.

定理 3. ([4,5]) λ, μ をそれぞれ q -Whittaker 測度, 周期的 Schur 測度で分布するランダムな分割とし λ_1, μ_1 をそれぞれの第一成分とする. また χ を分布 $\mathbb{P}(\chi = n) = (q; q)_\infty q^n / (q; q)_n, \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に従う確率変数とする. このとき $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\mathbb{P}(\mu_1 + \chi \leq n) = \mathbb{P}(\lambda_1 \leq n)$$

が成り立つ.

上の定理 3 は, KPZ モデルと有限温度フェルミオン点過程との関係を明示的に表している. この関係によって KPZ モデルに現れる行列式構造の起源が有限温度自由フェルミオンにあることが示唆される. 上の定理 3 の証明のために, 我々は組み合わせ論的な 1 対 1 対応によるアプローチをとる.

定理 4. ([5]) 1 対 1 対応 T

$$(V, W, \kappa, \nu) \xleftrightarrow{T} (P, Q)$$

が存在する. ただし右辺の (P, Q) は同じ形をもつ歪半標準盤のペアを表し, 左辺の (V, W, κ, ν) は以下のよう
に定義される.

- (V, W) : 同じ形を持つ vertically strict tableaux(VST) のペア
- $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_{\mu_1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\mu_1}$ であり, 上の (V, W) の形を μ として $\mu'_i = \mu'_{i+1}$ ならば $\kappa_i \geq \kappa_{i+1}$ をみたすもの.
- $\nu \in \mathcal{P}$.

ただし形 μ の VST とは, ヤング図形 μ に数字が入ったもので, それらの数字は下方向に単調増大するもの
のことである. (以下の例 5 参照)

上の (V, W, κ, ν) と (P, Q) はそれぞれ q -Whittaker 測度と周期的 Schur 測度の組み合わせ論的対応物で
あり定理 4 から直ちに定理 3 が従う.

例 5. 形 $\mu = (4, 3, 1)$ の VST の例:

1	2	2	3
2	5	3	
3			

定理 4 の対応 T はその存在だけでなく, 歪 RSK ダイナミクスと呼ばれる歪半標準盤のペアの力学系を
考察することによって具体的なアルゴリズムも得られる. (以下の例 6 参照.)

例 6. T によって例えば以下のような対応が得られる.

$$\left(\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & \\ 3 & & & \end{array}, \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & \\ 3 & & & \end{array}; (0, 1, 1, 1); \emptyset \right) \xleftrightarrow{T} \left(\begin{array}{cccc} & & & 1 \\ & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & \\ 2 & & & \end{array}, \begin{array}{cccc} & & & 2 \\ & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & \\ 3 & & & \end{array} \right).$$

アルゴリズムの構成には, 歪 RSK ダイナミクスの持つ対称性が重要な役割を果たすが, その対称性は,
量子群に関連するアファインクリスタルや Demazure クリスタルによって明らかになる.

References

- [1] D. Betea and J. Bouttier, The periodic Schur process and free Fermions at finite temperature, *Math. Phys. Anal. Geom.*, 22:3, 2019.
- [2] A. Borodin. Periodic Schur process and cylindric partitions. *Duke Math. J.*, 391–468, 2007.
- [3] A. Borodin and I. Corwin. Macdonald processes. *Probab. Theory Relat. Fields*, 158:225–400, 2014.
- [4] T. Imamura, M. Mucciconi, and T. Sasamoto. Identity between restricted Cauchy sums for the q -Whittaker and skew Schur polynomials. arXiv: 2106.11913
- [5] T. Imamura, M. Mucciconi, and T. Sasamoto. Skew RSK dynamics: Greene invariants, affine crystals and applications to q -Whittaker polynomials. arXiv:2106.11922
- [6] I.G. Macdonald. *Symmetric Functions and Hall Polynomials*. Oxford classic texts in the physicalsciences. Clarendon Press, 1998.

NEW CHARACTERIZATION OF THE WEAK DISORDER PHASE OF DIRECTED POLYMERS IN BOUNDED RANDOM ENVIRONMENTS

STEFAN JUNK

AIMR, Tohoku University

ABSTRACT. We show that the weak disorder phase for the directed polymer model in a random environment is characterized by the integrability of the running supremum $\sup_{n \in \mathbb{N}} W_n^\beta$ of the associated martingale $(W_n^\beta)_{n \in \mathbb{N}}$. If the environment is bounded, we also show that $(W_n^\beta)_{n \in \mathbb{N}}$ is L^p -bounded in the whole weak disorder phase, for some $p > 1$. The argument generalizes to non-negative martingales with a certain product structure.

1. BACKGROUND

The *directed polymer model* was introduced in the physics literature to describe the folding of long molecule chains in a solution with random impurities. Mathematically, it is a model for random paths, called *polymers*, that are attracted or repulsed by a space-time random environment with a parameter $\beta \geq 0$, called *inverse temperature*, governing the strength of the interaction. See [2] for a recent survey of the model.

We focus on the *high temperature* phase, where it is known that the influence of the disorder disappears asymptotically and that the long-term behavior is diffusive. This weak disorder phase is characterized by whether an associated martingale, $(W_n^\beta)_{n \in \mathbb{N}}$, is uniformly integrable (UI), which is known to hold for small β if the spatial dimension is at least three.

This martingale contains a lot of information about the long-term behavior of the polymers, but (UI) is difficult to analyze in practice. Namely, (UI) means that

$$\sup_n \mathbb{E}[\varphi(W_n^\beta)] < \infty \tag{UI}$$

for some convex function φ with $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty$, but a priori the growth of $\frac{\varphi(x)}{x}$ may be extremely slow. Much research has therefore focused on a *very high temperature* phase, characterized by L^2 -boundedness of $(W_n^\beta)_{n \in \mathbb{N}}$, which is however known [1] to be a strictly stronger condition than (UI).

2. RESULT

We show [5, Theorem 1.1] that in the whole weak disorder phase, the martingale $(W_n^\beta)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfies

$$\mathbb{E} \left[\sup_n W_n^\beta \right] < \infty, \tag{1}$$

E-mail address: sjunk@tohoku.ac.jp.

2010 Mathematics Subject Classification. 60K37.

Key words and phrases. directed polymers and random environment.

which is a strictly stronger condition than (UI). In the case of a bounded environment, we use (1) to show that $(W_n^\beta)_{n \in \mathbb{N}}$ is L^p -bounded [5 Theorem 1.1], for some $p = p(\beta) > 1$, i.e., we show that (UI) holds with $\varphi(x) = x^p$.

3. COMMENTS

3.1. Integrability of the running maximum. We first recall an illustrative example [6 Chapter II, Exercise 3.15] for a uniformly integrable martingale that does not satisfy (1), and then discuss why the same is not possible for the martingale $(W_n^\beta)_{n \in \mathbb{N}}$ associated to the directed polymer model. The reason is that $(W_n^\beta)_{n \in \mathbb{N}}$ has a certain “product structure”, i.e.,

$$W_{n+m}^\beta = W_n^\beta \widehat{W}_m^\beta, \quad (2)$$

where \widehat{W}_m^β is a mixture of copies of W_m^β (each copy is independent of W_n^β). This structure has been noted before in the context of branching random walks or of the directed polymer on trees, but in those cases \widehat{W}_m^β is a mixture of *independent* copies of W_m^β .

3.2. L^p -boundedness. Here, we recall [3] that (1) already implies that (UI) holds with $\varphi(x) = x \log^+(x)$ for martingales with bounded increments, which can be seen as a partial converse to Doob’s maximal inequality in the case $p = 1$. The improvement to L^p -boundedness follows by a variation of this general argument, together with the product structure (2) that is specific to the directed polymer model.

3.3. Applications. Our result gives a new tool to analyse the long-term behavior of the directed polymer model in the high temperature phase. Some consequences are described in the follow-up work [4].

REFERENCES

- [1] M. Birkner. A condition for weak disorder for directed polymers in random environment. *Electron. Comm. Probab.*, 9:22–25, 2004.
- [2] F. Comets. *Directed polymers in random environments*, volume 2175 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Cham, 2017. Lecture notes from the 46th Probability Summer School held in Saint-Flour, 2016.
- [3] R. F. Gundy. On the class $L \log L$, martingales, and singular integrals. *Studia Math.*, 33:109–118, 1969.
- [4] S. Junk. The central limit theorem for directed polymers in weak disorder, revisited, May 2021. arXiv:2105.04082.
- [5] S. Junk. New characterization of the weak disorder phase of directed polymers in bounded random environments, May 2021. arXiv:2105.03107. To appear in *Communications in mathematical physics*.
- [6] D. Revuz and M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1999.

Spectral dimension of simple random walk on a long-range percolation cluster

熊谷 隆 (京都大学数理解析研究所)

Joint work with V.H. Can (National Univ. of Singapore) and D.A. Croydon (RIMS)

<https://arxiv.org/abs/2111.00718>

ランダムなグラフ上のランダムウォークのスペクトル次元の解析は、ガウス型の場合の他、ランダムウォークに強い再帰性がある場合に研究が進んでいる (cf. [3])。本講演では、[5] に触発された、ランダムグラフ上のランダムウォークの熱核の on-digagonal lower bound の一般論および、long-range percolation 上のランダムウォークの熱核評価への応用に関する最近の研究結果を報告する。

1. Long-range percolation 上のランダムウォークの熱核評価

\mathbb{Z}^d 上の long-range percolation で、nearest-neighbour edges は繋がっているものを考える。すなわち、 $q_{x,y}$ を $x, y \in \mathbb{Z}^d$ が (重み 1 のコンダクタンスで) 繋がっている確率とし、

$$q_{x,y} = 1 \text{ if } |x - y| = 1, \quad c_1 |x - y|^{-s} \leq q_{x,y} \leq c_2 |x - y|^{-s} \text{ if } |x - y| > 1$$

とする (ただし $s > d$)。[注意：所謂 long-range percolation は $q_{x,y} = 1 - \exp(-|x - y|^{-s})$ であるが、我々の結果は上の仮定のもとで成り立つ。] このモデルを以下では $\text{LRP}(d, s)$ と記し、媒質のランダムネスを \mathbf{P} 、その平均を \mathbf{E} で表す。

$(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ を $\text{LRP}(d, s)$ 上の単純ランダムウォークとし、その熱核を以下で定める。

$$p_t^G(x, y) := \frac{P_x^G(X_t = y)}{\deg_G(y)}, \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}^d, t \in \mathbb{N}.$$

ここで、 P_x^G は $X_0 = x$ とした X の quenched law で、 $\deg_G(y)$ は y と繋がるボンドの数とする。

Theorem 1 (Quenched bounds)

(a) $d \geq 1$, $s \in (d, \min\{d + 2, 2d\})$ の時、 \mathbf{P} -a.s. で十分大きい $t \in \mathbb{N}$ について以下が成り立つ。

$$c_1 t^{-\frac{d}{s-d}} (\log t)^{-\delta_1} \leq p_{2t}^G(\rho, \rho) \leq c_2 t^{-\frac{d}{s-d}} (\log t)^{\delta_2}.$$

(b) $d = 1$, $s > 2$ の時、 \mathbf{P} -a.s. で十分大きい $t \in \mathbb{N}$ について以下が成り立つ。

$$c_3 t^{-\frac{1}{2}} \leq p_{2t}^G(\rho, \rho) \leq c_4 t^{-\frac{1}{2}}.$$

(上からの評価は、 $d = 1$, $s = 2$ でも成り立つ。)

(c) $d \geq 2$, $s \geq d + 2$ の時、 \mathbf{P} -a.s. で十分大きい $t \in \mathbb{N}$ について以下が成り立つ。

$$c_5 t^{-\frac{d}{2}} (\log t)^{-\delta_3} \leq p_{2t}^G(\rho, \rho) \leq c_6 t^{-\frac{d}{2}} (\log t)^{\delta_4}.$$

Theorem 2 (Annealed bounds)

(a) $d \geq 1$, $s \in (d, \min\{d + 2, 2d\})$ の時、十分大きい $t \in \mathbb{N}$ について以下が成り立つ。

$$c_1 t^{-\frac{d}{s-d}} \leq \mathbf{E}(p_{2t}^G(\rho, \rho)) \leq c_2 t^{-\frac{d}{s-d}} (\log t)^{\delta_2}.$$

(b) $d \geq 2$, $s = d + 2$ の時、十分大きい $t \in \mathbb{N}$ について以下が成り立つ。

$$c_3 t^{-\frac{d}{2}} (\log t)^{-\delta_5} \leq \mathbf{E}(p_{2t}^G(\rho, \rho)) \leq c_4 t^{-\frac{d}{2}}.$$

(c) $d \geq 1$, $s > \min\{d + 2, 2d\}$ の時、十分大きい $t \in \mathbb{N}$ について以下が成り立つ。

$$c_5 t^{-\frac{d}{2}} \leq \mathbf{E}(p_{2t}^G(\rho, \rho)) \leq c_6 t^{-\frac{d}{2}}.$$

(上からの評価は、 $d = 1$, $s = 2$ でも成り立つ。)

これらの定理の評価の一部（特に上からの評価の多く）は、すでに [1, 2, 4] 等の先行研究で得られている。また、一部は nearest-neighbour edges が繋がっているという仮定を置かずに証明できる。詳しくは講演で説明する。

以下の極限が存在する時、それぞれ quenched, annealed のスペクトル次元と呼ぶ。

$$d_s^{(q)}(d, s) := - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2 \log p_{2t}^G(\rho, \rho)}{\log t}, \quad \mathbf{P} - \text{a.s.}, \quad d_s^{(a)}(d, s) := - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2 \log \mathbf{E} (p_{2t}^G(\rho, \rho))}{\log t}.$$

Corollary 1 (Quenched and annealed spectral dimension)

(a) $d \geq 1, s \in (d, \min\{d+2, 2d\})$ の時、 \mathbf{P} -a.s. で以下が成り立つ。

$$d_s^{(a)}(d, s) = d_s^{(q)}(d, s) = \frac{2d}{s-d}.$$

(b) $d \geq 1, s > \min\{d+2, 2d\}$ または $d \geq 2, s = d+2$ の時、 \mathbf{P} -a.s. で以下が成り立つ。

$$d_s^{(a)}(d, s) = d_s^{(q)}(d, s) = d.$$

• $d = 1, s = 2$ のところでスペクトル次元が不連続になっていることが分かるが、そこでのスペクトル次元は（極限の存在も含めて）分かっていない。

2. 熱核の on-diagonal lower bound

G を局所有限連結なランダムグラフ、 $\rho \in G$ とし、ランダムな有限連結グラフの列 (G_n, ρ_n) が (G, ρ) に Benjamini-Schramm 収束するとする。[すなわち、 ρ_n は G_n の頂点から uniform に取り、任意の $k \geq 1$ について G_n 内の ρ_n 中心半径 k の球が G 内の ρ 中心半径 k の球に分布収束するとする。] $G = (V, E), G_n = (V_n, E_n)$ とおき、 π_n を G_n 上の単純ランダムウォークの定常分布、 $\pi_n^*(\varepsilon) = \max\{\pi_n(W) : |W| \leq \varepsilon|V_n|\}$ とする。

(A1) $\alpha > 0$ が存在して任意の $n \in \mathbb{N}$ について $\mathbb{E} \left(\frac{|E_n|^2}{|V_n|^2} \right) \leq \alpha$ が成り立つ。

(A2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し、 n が十分大きければ $\mathbb{E} (\pi_n^*(\varepsilon)^2) \leq \alpha\varepsilon$ が成り立つ。

(A3) $\delta_0, \dots, \delta_3, \gamma > 0$ と $\lambda : (0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ が存在して、以下が成り立つ。任意の $t \in \mathbb{N}$ について、 $n_0 = n_0(t) \in \mathbb{N}$ が存在し、 $n \geq n_0$ について $1 - \lambda(t)^{-\delta_0}$ 以上の確率で disjoint な $(\Omega_i)_{i=1}^k \subset V_n$ と $A_k \subset \Omega_k$ が存在して以下を満たす： (a) $\max_{i=1, \dots, k} |\Omega_i| \leq \alpha t^\gamma \lambda(t)^{\delta_1}$, (b) $\sum_{i=1}^k \pi_n(A_i) \geq 1 - \alpha \lambda(t)^{-\delta_2}$, (c) $\sum_{i=1}^k \text{cap}_{\Omega_i}(A_i) \leq 2\alpha |E_n| t^{-1} \lambda(t)^{-\delta_3}$.

Proposition 1 (A1), (A2), (A3) を仮定する。

(a) $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(e^i)^{-\frac{\delta_0 \wedge \delta_2 \wedge \delta_3}{2}} < \infty$ とし、 $c_1 \leq \lambda(t)/\lambda(e^{i+1})$ for all $e^i \leq t \leq e^{i+1}$ and all $i \in \mathbb{N}$ とする。この時、 \mathbf{P} -a.s. で十分大きい $t \in \mathbb{N}$ について以下が成り立つ。

$$p_{2t}^G(\rho, \rho) \geq \frac{c_2}{t^\gamma \lambda(t)^{\delta_1 + 2(\delta_2 \wedge \delta_3)}}.$$

(b) $\lambda(t) = \lambda_0, 1 - C_\alpha \lambda_0^{-\frac{\delta_0 \wedge \delta_2 \wedge \delta_3}{2}} > 0$ とする。この時、 $c(\alpha, \lambda_0) > 0$ が存在して以下が成り立つ。

$$\mathbf{E} (p_{2t}^G(\rho, \rho)) \geq \frac{c(\alpha, \lambda_0)}{t^\gamma}, \quad \forall t \in \mathbb{N}.$$

References

[1] M. Biskup, X. Chen, T. Kumagai and J. Wang: *PTRF* **180** (2021), 847–889.
 [2] N. Crawford and A. Sly: I. *PTRF* **154** (2012), 753–786, II. *AOP* **41** (2013), 445–502.
 [3] T. Kumagai: *Lect. Notes in Math.* **2101**, Springer, (2014).
 [4] T. Kumagai and J. Misumi: *J. Theoret. Probab.* **21** (2008), 910–935.
 [5] J.R. Lee: Preprint available at arXiv:1701.01598, 2017.

Construction of a canonical p -energy on the Sierpiński carpet

Ryosuke Shimizu (Kyoto University)*

This talk will present the main results of [6], where a scaling limit \mathcal{E}_p of discrete p -energies on a series of finite graphs approximating the planar Sierpiński carpet (SC: see Figure 1) and an associated $(1, p)$ -“Sobolev” space \mathcal{F}_p are established for $p > \dim_{\text{ARC}}(\text{SC})$. Here $\dim_{\text{ARC}}(\text{SC})$ is the *Ahlfors regular conformal dimension* of the SC, which is well-studied in “quasiconformal geometry” (cf. [2]). Its definition is not important to follow our results.

To give concrete descriptions, we recall the definition of the SC. Let $S = \{1, \dots, 8\}$ and let $\{F_i\}_{i \in S}$ be a family of 3^{-1} -similitudes on \mathbb{R}^2 illustrated in Figure 1 (each p_i in Figure 1 is the fixed point of F_i). Then the SC is a unique non-empty compact subset K of \mathbb{R}^2 such that $\bigcup_{i \in S} F_i(K) = K$. We always consider the Sierpiński carpet as a metric measure space (K, d, μ) , where d is the Euclidean metric and μ is the normalized $\log 8/\log 3$ -dimensional Hausdorff measure ($\alpha := \log 8/\log 3$ is the Hausdorff dimension of (K, d)). Let $\{G_n\}_{n \geq 1}$ be a series of finite graphs approximating SC whose vertex set is $W_n := \{w_1 \cdots w_n \mid w_i \in S \text{ for each } i \in \{1, \dots, n\}\}$ and edge set is defined by $E_n := \{(v, w) \mid v, w \in W_n \text{ and } K_v \cap K_w \neq \emptyset\}$, where $F_w := F_{w_1} \circ \cdots \circ F_{w_n}$ and $K_w := F_w(K)$ for $w = w_1 \cdots w_n \in W_n$. Then discrete p -energy $\mathcal{E}_p^{G_n}$ on G_n is defined by

$$\mathcal{E}_p^{G_n}(f) = \frac{1}{2} \sum_{(v, w) \in E_n} |M_n f(v) - M_n f(w)|^p,$$

where $M_n f(w) := \frac{1}{\mu(K_w)} \int_{K_w} f d\mu$ for $f \in L^p(K, \mu)$. Our p -energy \mathcal{E}_p is obtained as a scaling limit of $\mathcal{E}_p^{G_n}$. An appropriate scaling constant is determined by behaviors of $\mathcal{R}_p^{(n)}$ given by

$$\mathcal{R}_p^{(n)} := \left(\inf \{ \mathcal{E}_p^{G_n}(M_n f) \mid M_n f \equiv 0 \text{ on the “left” of } G_n \text{ and } M_n f \equiv 1 \text{ on the “right” of } G_n \} \right)^{-1}.$$

By using p -combinatorial modulus, which is a fundamental tool in “quasiconformal geometry”, Bourdon and Kleiner [3] proved that there exists $\rho_p > 0$ such that $\mathcal{R}_p^{(n)} \asymp \rho_p^n$ for any $n \in \mathbb{N}$. An important fact is that $p > \dim_{\text{ARC}}(K, d)$ if and only if $\rho_p > 1$ by the result of Kigami [4].

Our first main result provides $(1, p)$ -“Sobolev” space \mathcal{F}_p on the SC:

Theorem 1. *Assume that $p > \dim_{\text{ARC}}(K, d)$. A norm space $(\mathcal{F}_p, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_p})$, which is defined by*

$$\mathcal{F}_p := \left\{ f \in L^p(K, \mu) \mid \sup_{n \geq 1} \rho_p^n \mathcal{E}_p^{G_n}(M_n f) < \infty \right\},$$

and $\|f\|_{\mathcal{F}_p} := \|f\|_{L^p} + \left(\sup_{n \geq 1} \rho_p^n \mathcal{E}_p^{G_n}(M_n f) \right)^{1/p}$, is a reflexive and separable Banach space. Moreover, \mathcal{F}_p is continuously embedded in the Hölder space $C^{0, (\beta_p - \alpha)/p}$ on K , where $\beta_p := \log(8\rho_p)/\log 3$. Furthermore, \mathcal{F}_p is dense in $C(K)$ with respect to the sup norm.

Ryosuke Shimizu was supported in part by JSPS KAKENHI Grant Number JP20J2020

*Email: r.shimizu@acs.i.kyoto-u.ac.jp

This Hölder embedding result is powerful and relies on the assumption: $p > \dim_{\text{ARC}}(K, d)$. Indeed, we can regard this embedding result as a generalization of the classical Sobolev embedding of $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ for $p > N$.

Our second main result provides a “canonical” p -energy \mathcal{E}_p on the SC:

Theorem 2. *Assume that $p > \dim_{\text{ARC}}(K, d)$. Then there exists a functional $\mathcal{E}_p: \mathcal{F}_p \rightarrow [0, \infty)$ such that $\mathcal{E}_p(\cdot)^{1/p}$ is a semi-norm, a norm $\|\cdot\|_{\mathcal{E}_p} := \|\cdot\|_{L^p} + \mathcal{E}_p(\cdot)^{1/p}$ is equivalent to $\|\cdot\|_{\mathcal{F}_p}$, and the Banach space $(\mathcal{F}_p, \|\cdot\|_{\mathcal{E}_p})$ is uniformly convex. Furthermore, $(\mathcal{E}_p, \mathcal{F}_p)$ satisfies the following conditions:*

- (a) $\mathbb{1}_K \in \mathcal{F}_p$, and, for $f \in \mathcal{F}_p$, $\mathcal{E}_p(f) = 0$ if and only if f is constant. Furthermore, $\mathcal{E}_p(f + a\mathbb{1}_K) = \mathcal{E}_p(f)$ for any $f \in \mathcal{F}_p$ and $a \in \mathbb{R}$;
- (b) (Markov property) for every $f \in \mathcal{F}_p$ and $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ with $\text{Lip}(\varphi) \leq 1$, it follows that $\varphi \circ f \in \mathcal{F}_p$ and $\mathcal{E}_p(\varphi \circ f) \leq \mathcal{E}_p(f)$;
- (c) (Symmetry) for every $f \in \mathcal{F}_p$ and isometry $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ with $T(K) = K$, it follows that $f \circ T \in \mathcal{F}_p$ and $\mathcal{E}_p(f \circ T) = \mathcal{E}_p(f)$;
- (d) (Self-similarity) it holds that $\mathcal{F}_p = \{f \in C(K) \mid f \circ F_i \in \mathcal{F}_p \text{ for all } i \in S\}$ and $\mathcal{E}_p(f) = \rho_p \sum_{i \in S} \mathcal{E}_p(f \circ F_i)$ for every $f \in \mathcal{F}_p$.

I will also give an associated energy measure $\mu_{\langle f \rangle}^p(dx)$ on the SC, which plays the roles of the measure $|\nabla f|^p dx$ on \mathbb{R}^N .

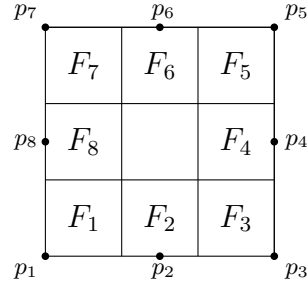
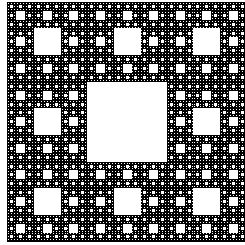


Figure 1: The planar Sierpiński carpet

References

- [1] M. T. Barlow and R. F. Bass, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **25** (1989), no. 3, 225–257.
- [2] M. Bonk and B. Kleiner, *Geom. Topol.* **9** (2005), 219–246.
- [3] M. Bourdon and B. Kleiner, *Groups Geom. Dyn.* **7** (2013), no. 1, 39–107.
- [4] J. Kigami, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 2265, Springer, Cham, [2020] ©2020.
- [5] S. Kusuoka and X.-Y. Zhou, *Probab. Theory Related Fields* **93** (1992), no. 2, 169–196.
- [6] R. Shimizu, preprint (2021). [arXiv:2110.13902](https://arxiv.org/abs/2110.13902)

BV FUNCTIONS AND SETS OF FINITE PERIMETER ON THE CONFIGURATION SPACE

KOHEI SUZUKI (Bielefeld University)

ABSTRACT

A function of *bounded variation* (*BV function*) in the Euclidean space \mathbb{R}^n is defined as an integrable function whose weak partial derivative is a (signed) Radon measure with finite total variation. A measurable subset A in \mathbb{R}^n is called a set of *finite perimeter*, or *Caccioppoli set* if the indicator function χ_A on A is a BV function.

The theory of BV functions provides the study of ‘measure-theoretic differentiable functions’ and it has been one of the main subjects in geometric measure theory to study properties of singular sets arising in various geometric and analytic contexts, e.g., the theory of minimal surfaces, the structure theory of perimeters, and furthermore, it plays a significant role for stochastic analysis with singular boundaries.

In this talk, we explore the theory of BV functions on the configuration space $\Upsilon(\mathbb{R}^n)$ over the Euclidean space \mathbb{R}^n equipped with the Poisson measure π . As the space $\Upsilon(\mathbb{R}^n)$ is not locally compact and the Poisson measure π does not support the volume doubling property with any reasonable choice of distance functions, there is no chance to apply the existing general theory for BV functions on doubling spaces. In particular, the concept of finite-codimensional measures needs to be rigorously understood in $\Upsilon(\mathbb{R}^n)$. Furthermore, due to the lack of the local compactness, the Riesz–Markov–Kakutani representation theorem is not available, which affects the construction of perimeter measures supporting the Gauß–Green formula.

We start by introducing the concept of the m -codimensional Poisson measure ρ^m on $\Upsilon(\mathbb{R}^n)$, which is formally written as ‘ $(\infty - m)$ -dimensional Poisson measure’. We then construct ρ^m by using the finite-particle approximation. Based on the measure ρ^m , we develop the theory of BV functions:

- we prove $\text{Cap}_{\alpha,p}(A) = 0 \implies \rho^m(A) = 0$ provided $\alpha p > m$. This is an extension of the well-known relation between (α, p) -Bessel capacities and finite-codimensional Hausdorff measures on \mathbb{R}^n to the case $\Upsilon(\mathbb{R}^n)$;
- we define BV functions in terms of *the variational approach*, *the relaxation approach*, and *the semigroup approach*, and prove the equivalence of them.
- we construct the *total variation measures* and the *perimeter measures* $|D\chi_A|$ on a Caccioppoli set A , and prove the *co-area formula*;
- we introduce a measure-theoretic boundary ∂^*A (*reduced boundary*) for a Caccioppoli set A , and prove the *De Giorgi’s theorem*:

$$|D\chi_A| = \rho^1|_{\partial^*A};$$

- we prove the *Gauß–Green formula*.

If time allows, we also discuss applications of BV theory to stochastic analysis of infinite particle systems.

This talk is based on the joint work with Elia Brué (Institute for Advanced Study, Princeton).

Renormalization of the stochastic nonlinear heat and wave equations driven by subordinate cylindrical Brownian noises

Hirotsu Nagoji (Kyoto University)

We consider the following stochastic nonlinear heat and wave equations on two-dimensional torus $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$:

$$\mathcal{L}u = \pm u^k + \partial_t W_L \quad (1)$$

where $k \geq 2$, $\mathcal{L} = \partial_t - \Delta$ or $\partial_t^2 - \Delta$ and W_L denotes a “subordinate cylindrical Brownian motion” which we define as follows: Let W be a cylindrical Brownian motion on $L^2(\mathbb{T}^2)$, formally expressed by Fourier expansion

$$W(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^2} \beta^l(t) e^{\sqrt{-1}l \cdot x}$$

with independent and identically distributed sequence of standard Brownian motions $\{\beta^l\}_{l \in \mathbb{Z}^2}$, and let L be \mathbb{R}_+ -valued stochastic process with nondecreasing and càdlàg sample paths. We also assume that L is independent of $\{\beta^l\}_{l \in \mathbb{Z}^2}$. Then, we define W_L by

$$W_L(t) := W(L(t)).$$

The main reason of considering such a time-change is that if L is Lévy process, W_L also becomes a Lévy process and some important Lévy processes are constructed by this “subordination” procedure.

If $L(t) = t$, $\partial_t W_L$ is nothing but a space-time white noise. Stochastic heat equation (1) with an additive space-time white noise is studied in [1]. Stochastic wave equation (1) is also considered in [2] by a similar approach. We generalize these settings and study both heat and wave equations driven by subordinate cylindrical Brownian noise.

It is expected that a solution u of (1) is a distribution-valued stochastic process and the nonlinear term u^k does not make sense. We overcome this difficulty by “renormalization” similarly to [1].

1. Let $\{P_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ be mollifier and consider the equation with regularized noise $P_N \partial_t W_L$ instead of $\partial_t W_L$.
2. Then, we replace the nonlinear term u_N^k by

$$u_N^{\diamond k} := H_k(u_N; c_N)$$

with suitable sequence c_N where $H_k(x; c)$ is k th Hermite polynomial. (For example, $H_2(x, c) = x^2 - c$, $H_3(x, c) = x^3 - 3cx$.)

Thanks to this renormalization procedure, we can get a nontrivial limit $u := \lim u_N$ and we define by u the solution of renormalized equation:

$$\mathcal{L}u = \pm u^{\diamond k} + \partial_t W_L \quad (2)$$

In our setting, we have to choose c_N to be a L -measurable \mathbb{R}_+ -valued stochastic process which diverges in some sense, while in [1] and [2], c_N can be chosen as a diverging constant. Indeed, we define it by conditional expectation:

$$c_N := \mathbb{E} [\Psi_N(t)^2 | \mathcal{F}^L]$$

where \mathcal{F}^L is σ -algebra generated by L and Ψ_N is the solution of

$$\mathcal{L}\Psi_N = P_N \partial_t W_L. \quad (3)$$

To solve (2), we define the shifted solution $v_N := u_N - \Psi_N$ and expand $u_N^{\diamond k}$ as

$$u_N^{\diamond k} = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} v_N^{k-l} \Psi_N^{\diamond l}$$

where $\Psi_N^{\diamond k} := H_k(\Psi_N; c_N)$. We have the following theorem on the convergence of $\Psi_N^{\diamond k}$.

Theorem 1. *Let $k \in \mathbb{N}$ and let Ψ_N be the solution of (3) with initial condition 0.*

1. *Let $\mathcal{L} = \partial_t - \Delta$. Then, $\Psi_N^{\diamond k}$ converges in $L^{\frac{2}{k}}([0, T]; B_{\infty, \infty}^{-\epsilon}(\mathbb{T}^2))$ as $N \rightarrow \infty$ almost surely for any $\epsilon > 0, T > 0$.*
2. *Let $\mathcal{L} = \partial_t^2 - \Delta$. Then, $\Psi_N^{\diamond k}$ converges in $C([0, T]; B_{\infty, \infty}^{-\epsilon}(\mathbb{T}^2))$ as $N \rightarrow \infty$ almost surely for any $\epsilon > 0, T > 0$.*

In the case of heat equation, we cannot expect the temporal continuity of Ψ since we are dealing with the equation driven by jump-type noise. So we discuss on L^p -space with respect to time variable t . Note that in the case of $k \geq 3$, we have to consider L^p -space for $0 < p < 1$ since $\frac{2}{k} < 1$. We also note that it is well-known that if $L(t) = t$, $\Psi_N^{\diamond k}$ converges to some $\Psi^{\diamond k}$ in $C([0, T]; B_{\infty, \infty}^{-\epsilon})$ i.e. $\Psi^{\diamond k}$ has time-continuity. In the case of wave equation, however, we can get the continuity in time, although the noise is jump-type.

By applying Theorem 1, we can show local-in-time well-posedness of singular SPDE (2).

Theorem 2. *1. Let $\mathcal{L} = \partial_t - \Delta$ and $k = 2$. Then, the renormalized heat equation (2) is locally well-posed.*

2. *Let $\mathcal{L} = \partial_t^2 - \Delta$. Then, for any integer $k \geq 2$, the renormalized wave equation (2) is locally well-posed.*

In the case of heat equation, we have not been able to deal with the case $k \geq 3$ due to the lack of time-integrability of $\Psi^{\diamond k}$ (See Theorem 1). On the other hand, in the case of wave equation, we could show local well-posedness for all $k \geq 2$. Indeed, the same fixed-point argument as in [2] is applicable to our situation in view of the time-continuity of $\Psi^{\diamond k}$.

References

- [1] G. Da Prato and A. Debussche. Strong solutions to the stochastic quantization equations. The Ann. Probab. 2003, Vol. 31, No. 4, 1900-1916.
- [2] M. Gubinelli, H. Koch, and T. Oh. Renormalization of the two-dimensional stochastic nonlinear wave equations. Trans. Amer. Math. Soc. 2018, Vol. 370, No. 10, 7335-7359.

FORWARD DRIFT-LESS SDES AND BACKWARD SDES

土屋 貴裕

1. INTRODUCTION

1.1. **大域的な解の存在と一意性.** いわゆる, Forward-Backward Stochastic Differential Equations (FBSDEs) の大域的な解の概要は前年度の紀要をみていただくことにして, ここ最近の目立った発展としては後ろ向き過程に関するターミナル関数が一様に有界で一次元に限っているが退化する場合でも (効用関数を念頭にした特定の係数の場合において) その存在と一意性を示した [3]. さらに局所的な解の存在は知られており, その張り合わせのような役目を担う Decoupling field¹ を常微分方程式の議論に落とし込んで統一的なアプローチを目的にした [4] などある.

1.2. **退化する係数.** まずは次のような例を考えよう. 任意の $\epsilon > 0$ をとり, 次のようなパラメータをもつ一次元の FBSDE を考える,

$$(1) \quad \begin{cases} X_\epsilon(r) = X_\epsilon(t) + \int_t^r Y_\epsilon(s) ds + \int_t^r \epsilon Y_\epsilon(s) dW(s) \\ Y_\epsilon(r) = X_\epsilon(T) - \int_r^T Z_\epsilon(s) dW(s), \quad r \in [t, T], \quad \epsilon \geq 0. \end{cases}$$

この解の存在は [4] によって保証されている². そして丸山-ギルサノフ変換 $dB(s) = dW(s) - \epsilon^{-1}ds$ を用いると以下の drift-less Forward and Backward Stochastic Differential Equation になる.

$$\begin{cases} X_\epsilon(r) = x + \int_t^r Y_\epsilon(s) dB(s) \\ Y_\epsilon(r) = X_\epsilon(T) + \int_r^T (-\epsilon^{-1}) Z_\epsilon(s) ds + \int_r^T Z_\epsilon(s) dB(s), \quad r \in [t, T]. \end{cases}$$

この紐付け ϵ をゼロに近づけたときに起こることに興味がある. ところが形式的に $\epsilon = 0$ としたものに对应することを期待する FBSDE は

$$(2) \quad \begin{cases} x_0(r) = x + \int_t^r Y_0(s) ds \\ Y_0(r) = X_0(T) - \int_r^T Z_0(s) dW(s), \quad r \in [t, T], \end{cases}$$

であり, その局所的な解は

$$(X_0, Y_0, Z_0)(r) = \left(\frac{r}{1-(T-t)}x, \frac{T}{1-(T-t)}x, 0 \right), \quad 1-T < t \leq r \leq T.$$

したがって初期値が $x > 0$ から出発するものは終点 T から離れたところで無限へと爆発してしまう. 負から出発しても発散してしまう. そして $x = 0$ に限り自明な解になる.

この一見するとつまらない例について, $x = 0$ のときだけ大域的な解を与えているのではないかと見方をかえてみる. 0 からの出発は係数が 0 になるので解は初期値から遠くへ行かない, ところが少しでも 0 から離れるとドリフトがある種の特異性を導き出してしまつて戻つてこれなくなつてしまつたと考えてみる. すると退化する性質が解の存在の重要な鍵になっているのではないかという疑問がわく.

¹ 前向き過程 X が時刻 t で x から出発したものを $X^{t,x}$ と書くことにする. そして, (t, x) のペアに対応する後ろ向き SDE の解 $Y \equiv Y^{t,x}$ について decoupling field とは $Y^{t,x}(t) = u(t, x)$ を適当な filtration を採用することで満たす.

² 実際に用いられている記法を用いて $F = \bar{F} = \underline{F}$ and $F(y) = -\epsilon y^2$ であることからわかる. これは任意の $T > 0$ で有界であり, 彼らの論文の Theorem 5.2 の (iii) における $F(1) \leq 0$ と $F(0) = 0$ が満たされる. したがって Theorem 7.3 から一意性と存在が言える.

1.3. **非退化性と実解析的構造.** 係数が退化しない場合についてはヘルマンダー条件のようによく整備された数学的構造がある. 実際に FBSDE においても偏微分方程式の理論が非常に有用に機能して, さらに確率論的な解析を用いることで, 解の存在と一意性について自然な仮定の上で解明されている, 例えば [1]. ただし, Z が拡散係数に依存すると話は別である. なぜなら偏微分方程式の観点から見れば Z を考えることはより複雑な非線形な偏微分方程式を扱うことになる. これは大変に難しく未知の部分が大きい. しかしながら Z が数学的な豊かな構造をもたらすのは想像に易い. 荒っぽく言えば Z は初期値に関する微分の情報と拡散係数で implicit に表示されるのでいわゆる分布依存の係数に繋がる. この方向では [2] を皮切りに非線形な Fokker-Planck から分布依存な係数を持つ SDEs への昇華という観点から研究が進んでいる.

FBSDEs の枠組みに戻るとその大域的な解において大きな進展のひとつである最近のアプローチ [4] でも上の例はその非退化性を本質的に依存しており, 退化していく様子は捉えられない. また特別な係数にのみ適応できる手法であり, 先に挙げた Fromm の方法の一般化は厳しいように思われる.

一方, 確率微分方程式では退化性と解の振る舞いについて一次元の場合なら Feller の条件として非常に詳しく知られている. 多次元の場合において係数がなめらかであれば渡辺山田の定理から, 退化する場合であっても解が存在するギリギリの境界は特徴づけられている. 本研究ではそのような確率微分方程式にある事実を念頭にして, FBSDE の解の構造に対しても退化する係数によって特徴付を試みた. そして以下のような部分的ながら結果が得られたので報告をする.

2. DRIFT-LESS FORWARD AND BACKWARD SDES

本研究では次のような前向き過程のドリフトがない場合をについて考える:

$$\begin{cases} X(r) = X(t) + \int_t^r \sigma(X(s), Y(s), Z(s)) dW(s) \\ Y(r) = \varphi(X(T)) - \int_r^T f(X(s), Y(s), Z(s)) ds + \int_r^T Z(s) ds \end{cases}$$

係数 σ, φ, f は適当な可測性と滑らかさを満たすとする.

まず, 前年度の講演においてドライバーと呼ばれる f がなく, さらに一次元であれば解けることを報告した. 鍵となるのは decoupling field u が空間に関して十分な滑らかさ, 特にリップシツ連続性を持つこと, さらに前向き過程の非負マルチンゲール性を用いた不等式による. これらの手法をそのまま拡張し, もしくは少し手を変えてなんとかなるような見込みもまったくない. 難点は u の連続性がドライバーの影響でほとんどみえなくなってしまうことにある.

そのため本研究では u の連続性でリップシツ連続は諦めた. 代わりにヘルダー連続性は満たされるだろうと踏んで, 実際にある仮定の元でまずはそれを示す. さらに適当な近似列を構築し, 退化性を用いることで都合の良い収束列が選出できる. すると, その収束先が欲しい FBSDE の解をもたらしてくれる. そのような流れになっており, 以前とはかなり異なる手法を用いている.

講演で述べる結果は冒頭で述べたターミナル関数の有界性の仮定を外し, さらに一般的な係数と次元において拡張している. ただし, 前向き過程のマルチンゲール性に依存しているのでドリフト付きのすべての結果を含むわけではないことに注意する.

REFERENCES

1. Fabio Antonelli, *Backward-Forward Stochastic Differential Equations*, Ann. Appl. Probab. **3** (1993), no. 3, 777–793.
2. Philippe Blanchard, Michael Röckner, and Francesco Russo, *Probabilistic representation for solutions of an irregular porous media type equation*, The Annals of Probability **38** (2010), no. 5, 1870–1900.
3. Alexander Fromm and Peter Imkeller, *Utility maximization via decoupling fields*, 2017.
4. Jin Ma, Zhen Wu, Detao Zhang, and Jianfeng Zhang, *On well-posedness of forward-backward SDEs – a unified approach.*, Ann. Appl. Probab. **25** (2015), no. 4, 2168–2214.

会津大学コンピューター理工学部
E-mail address: tsuchiya@u-aizu.ac.jp

Local time penalizations with various clocks for Lévy processes

武田 翔成 (京都大学理学研究科)

矢野 孝次 氏 (京都大学理学研究科) との共同研究

(X, \mathbb{P}_x) を $X_0 = x$ となる 1 次元 Lévy 過程とし, (\mathcal{F}_t) をそのフィルトレーションとする. さらに L を 0 における局所時間 (local time) とする. この下で, 以下のような極限の問題を考える. これを局所時間の**処罰問題 (penalization problem)** という:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}_x[F_t f(L_\tau)]}{\mathbb{P}_x[f(L_\tau)]} = \mathbb{Q}_x[F_t]. \quad (0.1)$$

ただし, \mathbb{Q}_x は極限で得られる確率測度, $\mathbb{P}_x[\cdot], \mathbb{Q}_x[\cdot]$ は期待値の意味であり, F_t は \mathcal{F}_t -可測な有界汎関数, f は $\int_0^\infty f(x) dx < \infty$ となる非負関数である (以下これを $f \in \mathcal{L}_+^1$ とあらわす). さらに τ は ∞ に発散するランダム時刻の有向族である. これを**時計 (clock)** という.

定数時計に対する処罰問題の研究は, ブラウン運動に対して Roynette–Vallois–Yor [2, 3] にはじまり, 対称安定過程に対して Yano–Yano–Yor [5] で調べられた. Profeta–Yano–Yano [1] は 1 次元拡散過程に対し, ランダム時計の処罰問題を調べた. 本講演では, 論文 [4] に基づき, 非対称な 1 次元 Lévy 過程に対して, ランダム時計の局所時間処罰問題の結果を紹介する.

特性関数の指数 $\Psi(\lambda)$ を $\mathbb{P}_0[e^{i\lambda X_t}] = e^{-t\Psi(\lambda)}$ で定義する. このとき, 定数 $v \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ と $\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2) \nu(dx) < \infty$ をみたま $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上の Lévy 測度 ν が存在して,

$$\Psi(\lambda) = iv\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\lambda x} + i\lambda x 1_{|x|<1}) \nu(dx) \quad (0.2)$$

と表せる. 本講演では, 常に以下を仮定する.

仮定. X は再帰的 (recurrent) であり, かつ任意の $q > 0$ に対して,

$$\int_0^\infty \left| \frac{1}{q + \Psi(\lambda)} \right| d\lambda < \infty \quad (0.3)$$

が成立する.

このとき, q -レゾルベント密度 $r_q(x)$ が存在し,

$$r_q(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\lambda x}}{q + \Psi(\lambda)} \right) d\lambda. \quad (0.4)$$

となることが知られている. $h_q(x) = r_q(0) - r_q(-x)$ と定義すると, 以下が成立する.

定理 1. $h(x) := \lim_{q \rightarrow 0+} h_q(x)$ は $x \in \mathbb{R}$ で存在して有限値.

次の記号を定義する:

$$m^2 = \mathbb{P}[X_1^2] = \sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} x^2 \nu(dx) \in (0, \infty], \quad (0.5)$$

$$h^{(\gamma)}(x) = h(x) + \frac{\gamma}{m^2} x, \quad (0.6)$$

$$M_t^{(\gamma, f)} = h^{(\gamma)}(X_t) f(L_t) + \int_0^\infty f(L_t + u) du. \quad (0.7)$$

ただし $-1 \leq \gamma \leq 1$, $f \in \mathcal{L}_+^1$ とする. $m^2 = \infty$ のときは, γ による違いが生じないことに注意する. このとき, $h^{(\gamma)} \geq 0$ であり, $M_t^{(\gamma, f)}$ は非負のマルチンゲールとなることが示せる.

ここでは, ランダム時計を指数時計・到達時計・2点到達時計にしたときの, 処罰問題の結果を述べる.

定理 2 (指数時計による結果). e_q を平均 $1/q$ の独立な指数分布, $f \in \mathcal{L}_+^1$ とすると,

$$M_t^q := r_q(0) \mathbb{P}_x[f(L_{e_q}) | \mathcal{F}_t] \xrightarrow{q \rightarrow 0^+} M_t^{(0, f)} \quad (0.8)$$

が \mathbb{P}_x -a.s. かつ $\mathcal{L}^1(\mathbb{P}_x)$ で成立する.

これにより処罰問題の結果が得られる. 実際, $\mathbb{P}_x(M_0^{(0, f)} > 0) = 1$ とすると, \mathcal{F}_t -可測な有界汎関数 F_t に対して,

$$\lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}_x[F_t f(L_{e_q})]}{\mathbb{P}_x[f(L_{e_q})]} = \mathbb{P}_x \left[F_t \frac{M_t^{(0, f)}}{M_0^{(0, f)}} \right] \quad (0.9)$$

が成立するからである. 以下についても同じであるから, この形で述べるのは省略する.

定理 3 (到達時計による結果). $T_a = \inf\{t > 0: X_t = a\}$, $h^B(a) = \mathbb{P}_0[L_{T_a}]$ とする. このとき,

$$M_t^a := h^B(a) \mathbb{P}_x[f(L_{T_a}) | \mathcal{F}_t] \xrightarrow{a \rightarrow \pm\infty} M_t^{(\pm 1, f)} \quad (0.10)$$

が \mathbb{P}_x -a.s. かつ $\mathcal{L}^1(\mathbb{P}_x)$ で成立する.

定理 4 (2点到達時計による結果). $T_{a,b} = T_a \wedge T_b$ とする. さらに, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $\gamma = p - q$, $h^C(a, b) = \mathbb{P}[L_{T_{a,b}}]$ とする. このとき,

$$M_t^{p, a} := h^C(pa, -qa) \mathbb{P}_x[f(L_{pa, -qa}) | \mathcal{F}_t] \xrightarrow{a \rightarrow \infty} M_t^{(\gamma, f)} \quad (0.11)$$

が \mathbb{P}_x -a.s. かつ $\mathcal{L}^1(\mathbb{P}_x)$ で成立する.

これらの定理から, $m^2 < \infty$ のときは, ランダム時計の選び方によって, 極限の確率測度が異なるのが分かる.

参考文献

- [1] C. Profeta, K. Yano, and Y. Yano. Local time penalizations with various clocks for one-dimensional diffusions. *J. Math. Soc. Japan*, 71(1):203–233, 2019.
- [2] B. Roynette, P. Vallois, and M. Yor. Limiting laws associated with Brownian motion perturbed by its maximum, minimum and local time. II. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 43(3):295–360, 2006.
- [3] B. Roynette and M. Yor. *Penalising Brownian paths*, volume 1969 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [4] S. Takeda and K. Yano. Local time penalizations with various clocks for Lévy processes. In preparation, 2021.
- [5] K. Yano, Y. Yano, and M. Yor. Penalising symmetric stable Lévy paths. *J. Math. Soc. Japan*, 61(3):757–798, 2009.

Arcsine and Darling–Kac laws for piecewise linear random interval maps

Kouji YANO (Kyoto University)

ランダムウォークに対して成立するレヴィの逆正弦法則と類似の結果は力学系に対しても成立することが知られている．本講演では，ある区分解形区間写像のランダム切り替えによるランダム力学系に対して逆正弦法則が成立することを報告する．本報告は，秦元仁氏の修士論文 [1] を元にした秦氏との共同研究 [2] に基づく．

逆正弦分布に従う確率変数を \mathcal{A} と書く：

$$\mathbb{P}(\mathcal{A} \in du) = \frac{du}{\pi\sqrt{u(1-u)}} \quad \text{on } (0, 1). \quad (1)$$

一次元単純対称ランダムウォーク $\{Z_n\}$ に対してレヴィの逆正弦法則

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{\{X_k > 0\}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{A} \quad \text{on } \mathbb{R} \quad (2)$$

が成立する．有限区間の滞在割合がゼロに概収束することに注意すると，この主張は，次のようにも書き換えられる：

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{X_k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{A}\delta_{+\infty} + (1 - \mathcal{A})\delta_{-\infty} \quad \text{on } \mathcal{P}[-\infty, \infty]. \quad (3)$$

但し， $[-\infty, \infty]$ は \mathbb{R} の二点コンパクト化であり， $\mathcal{P}S$ は位相空間 S の上の確率測度全体に弱収束の位相を入れた空間を表す．同相写像 $\varphi : [-\infty, \infty] \rightarrow [0, 1]$ を用いると，

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{\varphi(X_k)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{A}\delta_1 + (1 - \mathcal{A})\delta_0 \quad \text{on } \mathcal{P}[0, 1]. \quad (4)$$

という形に上の主張を書き換えることができる．

Thaler [4] は**ブール変換**に対して逆正弦法則が成立することを示した．ブール変換とは， $Sx = x - 1/x$ で定まる変換 $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を言うが，変数変換 $\Phi : (0, 1) \ni x \mapsto \frac{2x-1}{x(1-x)} \in \mathbb{R}$ によって変形された変換 $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ と同一視する：

$$Tx = \begin{cases} \frac{x(1-x)}{1-x-x^2} & (0 \leq x < 1/2) \\ 1 - T(1-x) & (1/2 < x \leq 1). \end{cases} \quad (5)$$

この変換は，不動点 $x = 0, 1$ の近傍を除くと拡大的であるが，不動点 $x = 0, 1$ においては微分が丁度 1 であるために，この点の付近に滞在する時間が支配的となる．一般に，微分が ± 1 となる不動点は**中立** (neutral あるいは indifferent) と呼ばれる．

定理 0.1 (Thaler [4]). 絶対連続な分布を持つ任意のランダム初期点 $\Theta \in [0, 1]$ に対し，

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{T^k\Theta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{A}\delta_1 + (1 - \mathcal{A})\delta_0 \quad \text{on } \mathcal{P}[0, 1]. \quad (6)$$

この結果は，一般的な力学系に対する結果の特別な場合として示されており，さらに条件を緩和した一般論が得られている (関連文献は Sera [3] にまとめられている)．

ここで、次の二つの写像を考える:

$$\tau_1(x) = \begin{cases} x/2 & (0 \leq x \leq 1/2) \\ 2x - 1 & (1/2 < x \leq 1), \end{cases}, \quad \tau_2(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leq x \leq 1/2) \\ (x + 1)/2 & (1/2 < x \leq 1). \end{cases} \quad (7)$$

これら二つの写像は吸引的不動点を持つ:

$$\tau_1^n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad \tau_2^n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 \quad \text{for } x \in [0, 1] \text{ except } 0, 1/2, 1. \quad (8)$$

これら二つの写像を等確率で選択するランダム写像を考える:

$$T = \begin{cases} \tau_1 & (\text{with probability } 1/2), \\ \tau_2 & (\text{with probability } 1/2). \end{cases} \quad (9)$$

このランダム写像 T に対して、不動点 $x = 0, 1$ は次の意味で中立である:

$$\mathbb{E} \log |T'(0+)| = \mathbb{E} \log |T'(1-)| = 0. \quad (10)$$

ランダム写像 T の反復は次のように与えられる. $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ を T の iid コピーとして

$$T^{(n)} = T_n \circ T_{n-1} \circ \cdots \circ T_1 \quad (11)$$

とおく. $T^{(n)}$ はランダム写像 T の n 回反復に相当する.

定理 0.2 (Hata–Y [2]). ランダム写像列 $\{T_n\}$ と独立で絶対連続な分布を持つ任意のランダム初期点 $\theta \in [0, 1]$ に対し,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{T^{(k)}\theta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{A}\delta_1 + (1 - \mathcal{A})\delta_0 \quad \text{on } \mathcal{P}[0, 1]. \quad (12)$$

証明は、skew-product によって直積空間 $\{\tau_1, \tau_2\}^{\mathbb{N}} \times [0, 1]$ 上の決定的力学系に帰着し、マルコフ分割を構成してマルコフ連鎖との conjugacy を示して、Thaler–Zweimüller [5] の定理を適用する.

References

- [1] G. Hata. Arcsine law for a piecewise linear random map. *Master Thesis, Kyoto University*, 2019.
- [2] G. Hata and K. Yano. Arcsine and darling–kac laws for piecewise linear random interval maps. 2021. Preprint, arXiv:2108.01332.
- [3] T. Sera. Functional limit theorem for occupation time processes of intermittent maps. *Nonlinearity*, 33(3):1183–1217, 2020.
- [4] M. Thaler. A limit theorem for sojourns near indifferent fixed points of one-dimensional maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 22(4):1289–1312, 2002.
- [5] M. Thaler and R. Zweimüller. Distributional limit theorems in infinite ergodic theory. *Probab. Theory Related Fields*, 135(1):15–52, 2006.

Hitting times of rare events for a reaction–diffusion model

角田 謙吉 (Kenkichi TSUNODA)

Abstract

反応拡散模型は反応拡散方程式を統計力学的な模型から解析することを目的に [2] において導入された. 本講演では [6] の主結果に関連する結果とともに述べる.

$N \in \mathbb{N}$ をスケールパラメータとして \mathbb{T}_N を 1 次元離散トーラス $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ とする. 状態空間を $X_N = \{0, 1\}^{\mathbb{T}_N}$ により定義し, その元を配置とよび $\eta = \{\eta(x)\}_{x \in \mathbb{T}_N}$ と表す. 反応拡散模型は次の無限小生成作用素により定義される, X_N 上の Markov 過程 $\{\eta_t^N : t \geq 0\}$ のことである: X_N 上の実数値関数 f に対して,

$$L_N f(\eta) = N^2 \sum_{x \in \mathbb{T}_N} \{f(\eta^{x, x+1}) - f(\eta)\} + \sum_{x \in \mathbb{T}_N} c(\tau_x \eta) \{f(\eta^x) - f(\eta)\}.$$

ここで c は $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ 上の正值局所関数である (N が大きければ X_N 上の関数とみなせる). また $\{\tau_x : x \in \mathbb{T}_N\}$ は X_N に作用する平行移動群であり, $\eta^{x, y}, \eta^x$ はそれぞれ次で定義される配置である:

$$\eta^{x, y}(z) = \begin{cases} \eta(y), & \text{if } z = x, \\ \eta(x), & \text{if } z = y, \\ \eta(z), & \text{if } z \neq x, y. \end{cases} \quad \eta^x(z) = \begin{cases} 1 - \eta(x), & \text{if } z = x, \\ \eta(z), & \text{if } z \neq x. \end{cases}$$

続いて \mathbb{T} を 1 次元連続トーラス \mathbb{R}/\mathbb{Z} とし, $\eta \in X_N$ から決まる経験分布を次で定義する:

$$\pi^N(\eta) = \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} \eta(x) \delta_{x/N}.$$

ここで $u \in \mathbb{T}$ に対して δ_u は u に集中する Dirac 測度である. また $t \geq 0$ に対して $\pi_t^N = \pi^N(\eta_t^N)$ とおく.

経験分布過程 π_t^N に対する大数の法則 (流体力学極限) は [2] において示された. 初めにこの結果を紹介する. $0 \leq \rho \leq 1$ に対して ν_ρ を $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ 上の直積 Bernoulli 測度とし, $F(\rho) = \int c(\eta)(1 - 2\eta(0))\nu(d\eta)$ とする. このとき, π_0^N が $N \rightarrow \infty$ で $\rho_0(u)du$ (du は \mathbb{T} 上の Lebesgue 測度) に確率収束するならば, 任意の $t \geq 0$ に対して π_t^N が $N \rightarrow \infty$ で $\rho(t, u)du$ に確率収束する. ここで $\rho : [0, \infty) \times \mathbb{T}^d \rightarrow [0, 1]$ は次の反応拡散方程式の解である:

$$\begin{cases} \partial_t \rho = \Delta \rho + F(\rho), \\ \rho(0, \cdot) = \rho_0(\cdot). \end{cases}$$

Glauber part の飛躍率は正と仮定したので, Markov 過程 $\{\eta_t^N : t \geq 0\}$ は既約になりよく知られているように唯一の不変確率測度 μ_N をもつ. 講演者の研究 [4] において定常状態 μ_N に対する大数の法則 (流体静力学) が示された. 次にこれを紹介する. 以降 F は唯一の零点 $\rho_* \in (0, 1)$ をもつことを仮定する. \mathcal{M}_+ を \mathbb{T} 上の全測度が 1 以下の集合とし弱位相を備えさせる. 弱位相は適当な距離に対して距離化可能であるので, そのような距離 d を一つ固定する. このとき任意の $\delta > 0$ に対して次が成立する.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N (\eta : d(\pi^N(\eta), \rho_* du) \geq \delta) = 0.$$

この結果から $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}_+, \rho_* du \notin \overline{\mathcal{O}}$ なるものは

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N (\eta : \pi^N(\eta) \in \mathcal{O}) = 0,$$

を満たす. このため Markov 過程 $\{\eta_t^N : t \geq 0\}$ が $(\pi^N)^{-1}(\mathcal{O})$ に到達するという事象は “rare event” と考えられる. この到達時刻を $H_N^{\mathcal{O}}$ とすると, [6] の主結果は以下になる.

Theorem 0.1. 飛躍率 c 及び初期分布に関する適切な仮定の下で, $N \rightarrow \infty$ において正規化した到達時刻 $H_N^{\mathcal{O}}/\mathbb{E}_{\mu_N}[H_N^{\mathcal{O}}]$ は平均 1 の指数分布に分布収束する.

Theorem 0.1 を示すために [1] による一般論, 流体力学極限に対する大偏差原理 [4], 流体静力学に対する大偏差原理 [3] 及び混合時間の評価 [5] を用いる. 本講演では主結果の正確な仮定を述べるとともにこれらの結果についても紹介する.

References

- [1] O. BENOIS, C. LANDIM AND M. MOURRAGUI, *Hitting times of rare events in Markov chains*, J. Stat. Phys., **153**, 967–990 (2013).
- [2] A. DE MASI, P. FERRARI AND J. LEBOWITZ, *Reaction diffusion equations for interacting particle systems*, J. Statist. Phys., **44**, 589–644 (1986).
- [3] J. FARFAN, C. LANDIM AND K. TSUNODA, *Static large deviations for a reaction-diffusion model*, Probab. Theory Relat. Fields, **174**, 49–101 (2019).
- [4] C. LANDIM AND K. TSUNODA, *Hydrostatics and large deviations for a reaction-diffusion model*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., **54**, 51–74 (2018).
- [5] R. TANAKA AND K. TSUNODA, *Glauber-Exclusion dynamics: rapid mixing regime*. available at arXiv:2011.13158
- [6] K. Tsunoda, *Exponentially slow mixing and hitting times of rare events for a reaction-diffusion model*. available at arXiv:2105.12965

Some relation between spectral dimension and Ahlfors regular conformal dimension of resistance metrics

笹谷 晃平 (京都大学 D2)

本講演では Sierpiński Carpet (以下, SC) や Sierpiński Gasket (以下, SG) などのフラクタルを含む枠組である抵抗形式の範疇において, Ahlfors regular conformal dimension (以下, ARC 次元) とスペクトル次元の関係について述べる.

距離空間の ARC 次元は, 以下のように quasisymmetry 及び Ahlfors regularity によって定義される.

定義 1 (quasisymmetry). 集合 X 上の距離 d, ρ が quasisymmetric であるとは, ある同相写像 $\theta: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ があって, $x \neq z$ なる任意の x, y, z に対して

$$\theta(d(x, y)/d(x, z)) \geq (\rho(x, y)/\rho(x, z))$$

となることである. このとき, $d \underset{QS}{\sim} \rho$ と書く.

注意. $d \underset{QS}{\sim} \rho$ のとき両距離が X 上に導く位相は同相であり, また $\underset{QS}{\sim}$ は X 上の距離の同値関係を導く.

定義 2 (α -Ahlfors regular). 距離空間 (X, d) 及び $\alpha > 0$ に対し, ある Borel 測度 μ 及び定数 $C > 0$ があって, 任意の $x \in X$ 及び $r \in [\inf_{y: y \neq x} d(x, y), \text{diam}(X, d)]$ に対して $C^{-1}r^\alpha \leq \mu(B_d(x, r)) \leq Cr^\alpha$ を満たすとき, (X, d) は α -Ahlfors regular (以下, α -AR) であるという.

定義 3 (ARC 次元). 距離空間 (X, d) の ARC 次元を以下で定める. (ただし, $\inf \emptyset = \infty$.)

$$\dim_{\text{AR}}(X, d) = \inf \{ \alpha \mid d \underset{QS}{\sim} \rho \text{ かつ } \rho: \alpha\text{-AR なる } X \text{ 上の距離 } \rho \text{ が存在} \}$$

(X, d) に孤立点がないなら, $\dim_{\text{AR}}(X, d) = \inf \{ \dim_{\text{H}}(X, \rho) \mid \rho: \rho \underset{QS}{\sim} d \text{ かつ, ある } \alpha > 0 \text{ に対し } \alpha\text{-AR} \}$ とも表せる.

木上 [2] は, 孤立点を持たないコンパクト距離空間に性質のよい段階的な細分構造が入っているとき, その隣接構造から定まるグラフ上の p 次エネルギー ($p > 0$) の変分問題から定まるある種の臨界値として, その距離空間の ARC 次元が表されることを示した. (即ち, ARC 次元に 1 つの解析的な特徴付を与えた.) さらにこの特徴付けを用いて, 以下の不等式を示した.

定理 4 ([2], Theorem 4.7.9). $X:SG$ または (generalized) SC, d : ユークリッド距離の制限のとき

$$\dim_{\text{AR}}(X, d) \leq d_S(X, d) < 2 \text{ または } \dim_{\text{AR}}(X, d) \geq d_S(X, d) \geq 2 \tag{1}$$

のいずれか一方が成り立つ.

ただし, ここで $d_S(X, d)$ は (X, d) のスペクトル次元, 即ち (X, d) 上のブラウン運動の (あるいは, 標準ラブラシアン) の熱核 $p(t, x, x)$ に対し, $\lim_{t \rightarrow 0} -2 \log(p(t, x, x)) / \log t$ で表される量である.

講演者は, 式 (1) の関係がどのような範囲の距離空間及び対応する標準的な確率過程に対して成立するか, 研究を行ってきた. 本講演では, 抵抗形式の入った距離空間を考える. 集合 X 上の抵抗形式とは, 大まかに言えば X 上の実関数の部分線形空間 \mathcal{F} と, その上の半正定値対称 2 次形式 \mathcal{E} の組 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ であって, Markov 性を持ち, かつ $x \neq y$ なる任意の $x, y \in X$ に対し条件

$$R(x, y) := (\min \{ \mathcal{E}(f, f) \mid u \in \mathcal{F}, u(x) = 1, u(y) = 0 \})^{-1} \text{ が存在し } 0 < R(x, y) < \infty$$

を満たすようなものである。 $R(x, y)$ は X 上の距離となることが知られており、抵抗形式に付随する抵抗距離と呼ばれる。また定義の類似性から想像される通り、 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が一定の条件を満たすとき、任意の $x \in X$ 及び $r > 0$ に対し $0 < \mu(B_d(x, r)) < \infty$ を満たすような (X, R) の Borel 測度 μ に対して、 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は $L^2(X, \mu)$ 上の正則 Dirichlet 形式となる。これらの結果及び付随する Dirichlet 形式の熱核評価については [1] に纏められている。例として、SG や generalized SC のうち強局所的なものについては、対応するブラウン運動の Dirichlet 形式はこの枠組に含まれる。

主結果について述べるため、一様完全性と doubling 条件を導入する。 (X, d) を距離空間とする。

定義 5 (一様完全性). (X, d) が一様完全であるとは、ある $\gamma > 1$ があって、任意の $x \in X, r > 0$ であって $B_d(x, r) \neq X$ なるようなものに対し $B_d(x, \gamma r) \setminus B_d(x, r) \neq \emptyset$ なることである。

定義 6 (doubling condition). ある $N \geq 1$ があって、任意の $x \in X, r > 0$ に対し、ある $x_i \in X (1 \leq i \leq N)$ があって $B_d(x, 2r) \subset \cup_{1 \leq i \leq N} B_d(x_i, r)$ なるとき (X, d) は doubling であるという。

(X, d) が一様完全かつ doubling (resp. 完備) であって、 X 上の距離 ρ に対し $d \underset{QS}{\sim} \rho$ であれば、 (X, ρ) もまた一様完全かつ doubling (resp. 完備) である。またこのことから、孤立点を持たない距離空間 (X, d) について、 $\dim_{AR}(X, d) < \infty$ を満たすなら、一様完全かつ doubling であることが従う。

以下、 (X, d) は完備、一様完全、doubling な距離空間とし、 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を X 上の抵抗形式であって抵抗距離 R が $d \underset{QS}{\sim} R$ を満たすようなものとする。さらに μ を (X, d) 上の Borel 正則測度で、任意の $x \in X$ 及び $r > 0$ に対し $0 < \mu(B_d(x, r)) < \infty$ を満たすようなものとする。このとき [1] の結果より、 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は $L^2(X, \mu)$ 上の正則 Dirichlet 形式となり、対応する区分的に連続な熱核 $p(t, x, y)$ が存在する。本講演の主結果は以下の通りである。

定理 7. 極限

$$\overline{d}_S = 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in X, s \in (0, \text{diam}(X, d))} \frac{\log p(s/t, x, x) - \log p(s, x, x)}{\log t}$$

が存在し、 $\dim_{AR}(X, d) \leq \overline{d}_S < 2$ が成り立つ。

SC や SG 上のブラウン運動の場合 \overline{d}_S は d_S と一致するが、一般の場合にはこの 2 つの量は異なる。実際、 d_S については期待される不等式の反例が以下のように存在する。

定理 8 ([3], Theorem 1.5 の連続版). 上記の仮定を満たすある $(X, d), (\mathcal{E}, \mathcal{F}), \mu$ であって、 $d_S = \lim_{t \rightarrow 0} -2 \log(p(t, x, x)) / \log t$ が x によらないような極限として存在し、かつ $d_S < \dim_{AR}(X, d) < 2$ なるようなものが存在する。

参考文献

- [1] J. Kigami, Resistance forms, quasimetric maps and heat kernel estimates. *Mem. Amer. Math. Soc.* **216** (2012), no. 1015.
- [2] J. Kigami, *Geometry and analysis of metric spaces via weighted partitions*. Lecture Notes in Mathematics, 2265. Springer, Cham, 2020.
- [3] K. Sasaya, *Some relation between spectral dimension and Ahlfors regular conformal dimension on infinite graphs*. preprint, 2021, <https://arxiv.org/abs/2109.00851>

On the conformal walk dimension II: Non-attainment for some Sierpiński carpets

Naotaka Kajino (RIMS, Kyoto University)

Joint work with Mathav Murugan (University of British Columbia)

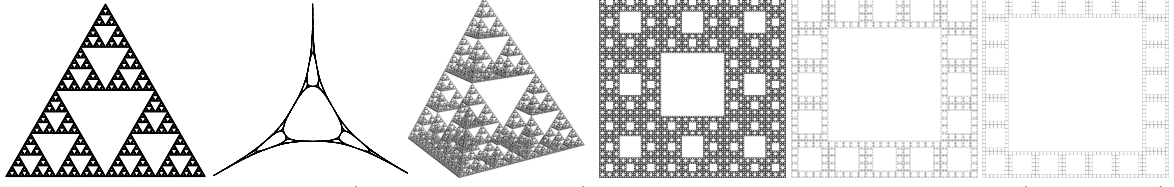


Fig. 1. Sierpiński gaskets (2-d., harm., 3-d.) Fig. 2. Sierpiński carpets SC_ℓ ($\ell = 3, 5, 7$)

This is a continuation of the speaker’s talk from 24 December 2020 on [4], which concerns the following set $\mathcal{G}_\beta(\mathcal{D})$ defined for $\beta \in (1, \infty)$ and a *metric measure Dirichlet (MMD) space* $\mathcal{D} = (K, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$, i.e., a strongly local regular symmetric Dirichlet space $(K, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ over a locally compact separable metric space (K, d) such that $B_d(x, r) := \{y \in K \mid d(x, y) < r\}$ has compact closure in K for any $(x, r) \in K \times (0, \infty)$:

$$\mathcal{G}_\beta(\mathcal{D}) := \left\{ (\theta, \mu) \left| \begin{array}{l} \theta \text{ is a metric on } K \text{ quasisymmetric to } d, \mu \text{ is a Radon mea-} \\ \text{sure on } K \text{ charging no set of zero } \mathcal{E}\text{-capacity and with full} \\ \mathcal{E}\text{-quasi-support, } (K, \theta, \mu, \mathcal{E}, \mathcal{F}^\mu) \text{ satisfies VD and HKE}(\beta) \end{array} \right. \right\}. \quad (\mathcal{G}_\beta)$$

Here we say that $(K, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ satisfies VD if and only if $m(B_d(x, 2r)) \leq c_v m(B_d(x, r))$ for any $(x, r) \in K \times (0, \infty)$ for some $c_v \in (0, \infty)$, and that it satisfies HKE(β) if and only if $(K, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ has a continuous heat kernel $p = p_t(x, y) : (0, \infty) \times K \times K \rightarrow [0, \infty)$ and there exist $c_1, c_2, c_3, c_4 \in (0, \infty)$ such that for any $r, t \in (0, \infty)$ and any $x, y \in K$,

$$\frac{c_1 \mathbf{1}_{[0, c_2]}(d(x, y)^\beta / t)}{m(B_d(x, t^{1/\beta}))} \leq p_t(x, y) \leq \frac{c_3 \exp(-c_4(d(x, y)^\beta / t)^{\frac{1}{\beta-1}})}{m(B_d(x, t^{1/\beta}))}. \quad \text{HKE}(\beta)$$

A metric θ on K is said to be *quasisymmetric* to d ($\theta \stackrel{\text{qs}}{\sim} d$) if and only if $\theta(x, y)/\theta(x, z) \leq \eta(d(x, y)/d(x, z))$ for any $x, y, z \in K$ with $x \neq z$, or equivalently, for any $x \in K$ and any $r, A \in (0, \infty)$ there exists $s \in (0, \infty)$ such that $B_\theta(x, s) \subset B_d(x, r)$ and $B_d(x, Ar) \subset B_\theta(x, \eta(A)s)$, for some homeomorphism $\eta : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$. Each μ as in (G $_\beta$) is such that “ \mathcal{E} becomes a regular Dirichlet form on $L^2(K, \mu)$ with core $\mathcal{F} \cap C_c(K)$ ”, whose domain is then denoted by \mathcal{F}^μ ; see [1, Corollary 5.2.10, (5.2.17) and Theorem 5.2.11] (here $C_c(K) := \{u : K \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ is continuous, } K \setminus u^{-1}(0) \text{ has compact closure in } K\}$).

It is relatively well known that $\mathcal{G}_\beta(\mathcal{D}) = \emptyset$ for any $\beta \in (1, 2)$ (unless K is a singleton); see [4, (1.5) and Lemma 4.7]. Our concern is whether $\mathcal{G}_\beta(\mathcal{D}) \neq \emptyset$ for $\beta = 2$, or at least for $\beta \in (2, \infty)$ arbitrarily close to 2, which is motivated by the following theorem.

Theorem 1 ([6]; see also [4, Theorem 6.30]). *Let \mathcal{D} be the MMD space of the Brownian motion on the 2-dimensional standard Sierpiński gasket (Fig. 1, left). Then $\mathcal{G}_2(\mathcal{D}) \neq \emptyset$.*

More precisely, [6] constructed a concrete element of $\mathcal{G}_2(\mathcal{D})$ on the basis of the geometry of the *harmonic Sierpiński gasket* (Fig. 1, center). As an answer to the question of whether $\mathcal{G}_\beta(\mathcal{D}) \neq \emptyset$ for a general MMD space \mathcal{D} , in [4] we have proved the following.

Naotaka Kajino was supported in part by JSPS KAKENHI Grant Numbers JP17H02849, 18H01123. Mathav Murugan was supported in part by NSERC and the Canada research chairs program.

Keywords: Brownian motion on generalized Sierpiński carpet, sub-Gaussian heat kernel estimate, walk dimension, time change of strongly local regular Dirichlet space, quasisymmetric change of metrics.

Theorem 2 ([4, Theorem 2.9]). *Let $\mathcal{D} = (K, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ be a MMD space with K having at least two elements. Then $\{\beta \in (1, \infty) \mid \mathcal{G}_\beta(\mathcal{D}) \neq \emptyset\}$ is $[2, \infty)$ or $(2, \infty)$ or \emptyset .*

Theorem 2 further raises the questions of *what \mathcal{D} satisfies $\mathcal{G}_2(\mathcal{D}) \neq \emptyset$ and what $\mathcal{G}_2(\mathcal{D})$ looks like when $\mathcal{G}_2(\mathcal{D}) \neq \emptyset$* . In these regards, in [4] we have proved the following.

Theorem 3 ([4, Proposition 2.10]; see also [3, Section 4]). *Let $\mathcal{D} = (K, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ be a MMD space with K having at least two elements, and let $\mu_{\langle u \rangle}$ be the \mathcal{E} -energy measure of $u \in \mathcal{F}$ as defined in [2, (3.2.14)]. Then for any $(\theta, \mu) \in \mathcal{G}_2(\mathcal{D})$, the following hold:*

- (1) *Define $d_\mu(x, y) := \sup\{u(x) - u(y) \mid u \in \mathcal{F} \cap C_c(K), \mu_{\langle u \rangle} \leq \mu\}$ for each $x, y \in K$. Then $c_{\theta, \mu}^{-1} d_\mu(x, y) \leq \theta(x, y) \leq c_{\theta, \mu} d_\mu(x, y)$ for any $x, y \in K$ for some $c_{\theta, \mu} \in [1, \infty)$.*
- (2) *Let A be a Borel subset of K . Then $\mu(A) = 0$ if and only if $\sup_{u \in \mathcal{F}} \mu_{\langle u \rangle}(A) = 0$.*

Theorem 4 ([4, Theorem 6.32]). *Let $N \in \mathbb{N}$ satisfy $N \geq 3$, and let \mathcal{D} be the MMD space of the Brownian motion on the N -dimensional standard Sierpiński gasket (see Fig. 1, right, for a picture for $N = 3$). Then $\mathcal{G}_2(\mathcal{D}) = \emptyset$.*

It was left open in [4] whether $\mathcal{G}_2(\mathcal{D}) \neq \emptyset$ for the MMD space \mathcal{D} of the Brownian motion on *generalized Sierpiński carpets* (see, e.g., [4, Subsection 6.4] and the references therein for its basics). As our main result, we answer this for those in Fig. 2 as follows.

Theorem 5 ([5]). *Let $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ be odd, and let SC_ℓ be the unique non-empty compact subset of \mathbb{R}^2 such that $\text{SC}_\ell = \bigcup_{i \in S_\ell} f_{\ell, i}(\text{SC}_\ell)$ (Fig. 2), where $f_{\ell, i}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is defined by $f_{\ell, i}(x) := \ell^{-1}i + \ell^{-1}x$ for $i \in \mathbb{Z}^2$ and $S_\ell := \{i \in \mathbb{Z}^2 \mid f_{\ell, i}([0, 1]^2) \subset [0, 1]^2 \setminus (\ell^{-1}, 1 - \ell^{-1})^2\}$. Then the MMD space $\mathcal{D} = (K, d, m, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ of the Brownian motion on $K := \text{SC}_\ell$, where d is the Euclidean metric and m is the uniform distribution on K , satisfies $\mathcal{G}_2(\mathcal{D}) = \emptyset$.*

Note that SC_3 (Fig. 2, left) is nothing but the 2-dimensional standard Sierpiński carpet.

We fix the setting of Theorem 5 in the rest of this article. The first step of the proof of Theorem 5 is to note the following theorem and proposition, which we had essentially proved in [4] for any generalized Sierpiński carpet in \mathbb{R}^N with arbitrary $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Theorem 6 (a special case of [4, (6.70) and Theorem 6.49]). *Set $V_0 := K \setminus (0, 1)^2$. If $\mathcal{G}_2(\mathcal{D}) \neq \emptyset$, then there exists $h \in \mathcal{F}$ which is \mathcal{E} -harmonic on $K \setminus V_0$, i.e., which satisfies $\mathcal{E}(h, v) = 0$ for any $v \in \mathcal{F} \cap C_c(K)$ with $v|_{V_0} = 0$, such that $(d_{\mu_{\langle h \rangle}}, \mu_{\langle h \rangle}) \in \mathcal{G}_2(\mathcal{D})$.*

Proposition 7 (cf. [4, Proposition 6.50, Lemma 6.52 and Proof of Theorem 6.49]). *Set $\mathcal{H}_2 := \{h + \mathbb{R}\mathbf{1}_K \mid h \in \mathcal{F}, h \text{ is } \mathcal{E}\text{-harmonic on } K \setminus V_0, (d_{\mu_{\langle h \rangle}}, \mu_{\langle h \rangle}) \in \mathcal{G}_2(\mathcal{D})\}$ and let $h \in \mathcal{H}_2$. Then the closure of $\{\mathcal{E}(h \circ F_{\ell, w}, h \circ F_{\ell, w})^{-1/2} h \circ F_{\ell, w}\}_{w \in \bigcup_{n=0}^{\infty} S_\ell^n}$ in $(\mathcal{F}/\mathbb{R}\mathbf{1}_K, \mathcal{E})$ is a compact subset of \mathcal{H}_2 , where $F_{\ell, w} := f_{\ell, w_1} \circ \dots \circ f_{\ell, w_n}|_K$ for $w = w_1 \dots w_n \in S_\ell^n$.*

Theorem 5 is obtained by combining Theorem 6, Proposition 7 and the following.

Proposition 8 ([5]). *Let $h_0 \in \mathcal{F}$ be \mathcal{E} -harmonic on $K \setminus ([0, 1] \times \{0, 1\})$ and satisfy $h_0|_{[0, 1] \times \{j\}} = j$ for $j \in \{0, 1\}$. Then $\max_{K \cap ([0, 1] \times [0, \ell^{-1}])} h_0 < \ell^{-1}$. Moreover, if $h \in \mathcal{F}$ is \mathcal{E} -harmonic on $K \setminus V_0$ and $h|_{[0, 1] \times \{0\}} = 0$, then $d_{\mu_{\langle h \rangle}}(x, y) = 0$ for any $x, y \in [0, 1] \times \{0\}$.*

References

- [1] Z.-Q. Chen and M. Fukushima, London Math. Soc. Monogr. Ser., vol. 35, 2012.
- [2] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda, de Gruyter Studies in Math., vol. 19, 2011.
- [3] N. Kajino and M. Murugan, *Ann. Probab.* **48** (2020), 2920–2951.
- [4] N. Kajino and M. Murugan, preprint, 2021. [arXiv:2008.12836](https://arxiv.org/abs/2008.12836)
- [5] N. Kajino and M. Murugan, in preparation.
- [6] J. Kigami, *Math. Ann.* **340** (2008), 781–804.