弱非対称排他過程に対する非圧縮極限

角田 謙吉, TSUNODA Kenkichi
大阪大学大学院理学研究科数学専攻

2019/03/08

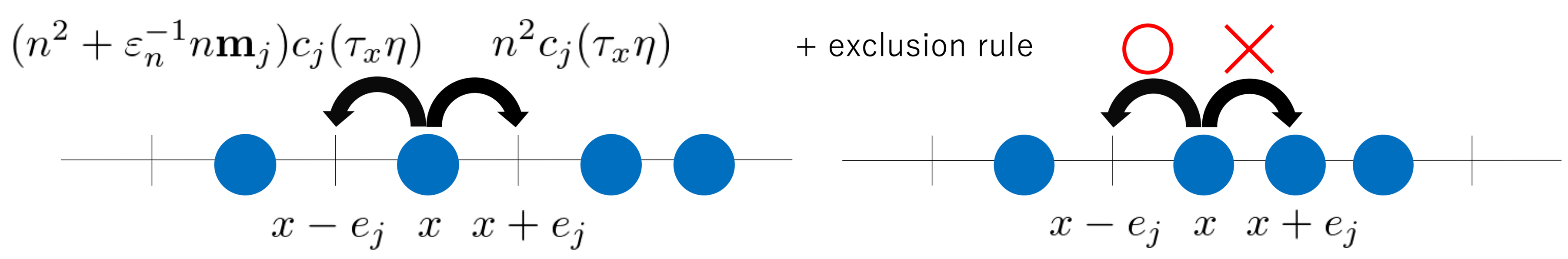
弱非対称排他過程

- ここでは, 弱非対称排他過程とよばれる, 確率的に運動する粒子系を導入する. これは次のようなミクロな粒子系である.
- $n \in \mathbb{N}$をスケールパラメータ, $\mathbb{T}_n^d = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^d$を$d$次元離散トーラスとする. 時刻$t \geq 0$, 場所$x \in \mathbb{T}_n^d$における配置$\eta_t^n(x)$を,

$$\eta_t^n \ = \ \{\eta_t^n(x) : x \in \mathbb{T}_n^d\} \ \in \{0,1\}^{\mathbb{T}_n^d} \ ,$$

とかくことにする.

- 粒子の配置は次の図のような規則に従って時間発展する:



- 正確な定義: $\eta_t^n = \{\eta_t^n(x) : x \in \mathbb{T}_n^d\}$は$\{0,1\}^{\mathbb{T}_n^d}$上のMarkov過程で, その生成作用素は$L_n = n^2 L_n^S + \varepsilon_n^{-1} n L_n^T$. 但し$L_n^S$と$L_n^T$はそれぞれ次により定義される: $f : \{0,1\}^{\mathbb{T}_n^d} \to \mathbb{R}$に対して,

$$(L_n^S f)(\eta) \ = \ \sum_{x \in \mathbb{T}_n^d} \sum_{j=1}^{d} c_j(\tau_x \eta) \{ f(\sigma^{x,x+e_j}\eta) - f(\eta) \} \ ,$$

$$(L_n^T f)(\eta) \ = \ \sum_{x \in \mathbb{T}_n^d} \sum_{j=1}^{d} \mathbf{m}_j \, c_j(\tau_x \eta) \, \eta_{x+e_j} (1-\eta_x) \{ f(\sigma^{x,x+e_j}\eta) - f(\eta) \} \ .$$

- 上の式において, $(\varepsilon_n : n \geq 1)$は$\varepsilon_n \downarrow 0$なる実数列, $c_j : \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq d$, は非負値局所関数, $\mathbf{m} = (\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_d) \in \mathbb{R}^d$.

経験分布

- ここでは, 経験分布とよばれる, 粒子系の密度に対応するものを定義する. 配置$\eta \in \{0,1\}^{\mathbb{T}_n^d}$に対して, $\mathbb{T}^d$上の測度を,

$$\pi(\eta, du) \ = \ \frac{1}{n^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_n^d} \eta(x) \delta_{x/n}(du) \ ,$$

と定義する. 但し$\delta_{x/n}$は$x/n \in \mathbb{T}^d$に集中するDirac測度である.

- また時刻$t \geq 0$に対して, $\pi_t^n(dx) = \pi(\eta_t^n, dx)$とおく. η_t^nがランダムであるから, π_t^nは$\mathbb{T}^d$上のランダム測度である.

主結果の前の補足

- 主結果のためには, 粒子系の飛躍率$(c_j)_j$に対して勾配型条件を仮定するが, 詳細については省略. また拡散行列Dや流動率σ(付録1参照)の定義についても省略. Dやσは粒子系を決める飛躍率$(c_j)_j$から具体的に定義される.
- 仮定$\varepsilon_n \downarrow 0$は非圧縮極限における$\varepsilon \downarrow 0$に対応している.
- またε_nがnに無関係にεであるとすると, 経験分布π_t^nは$n \to \infty$で(HDE(ε))の解に収束する(流体力学極限, 付録1参照):

$$\begin{cases} \partial_t u \ = \ \nabla \cdot [D(u) \nabla u] + \varepsilon^{-1} \nabla \cdot [\sigma(u) \mathbf{m}] \ , \\ u(t, \cdot) \ = \ u_0(\cdot) \ . \end{cases}$$

- この理由から粒子系に対して非圧縮極限を考えるためには, 粒子系の初期分布に対して

$$\pi_0^n(dx) \ \sim \ \alpha + \varepsilon_n v_0(x) dx \ ,$$

を仮定する. ただし, $v_0 : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$は滑らかな関数.

- 実際はε_nについて, 次元に依存する減衰条件を仮定する.

Theorem (Jara-Landim-T, 19+)

任意の$t \geq 0$に対して, 確率収束の意味で$n \to \infty$において

$$\varepsilon_n^{-1} (\pi_t^n - \alpha)(dx) \ \to \ v(t,x) dx \ ,$$

が成立する. ここで, $v : [0,\infty) \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$は(VBE)の一意的な解である.

要旨と先行研究

- 本研究の要旨: ミクロな系からマクロな方程式(HDE)を得る流体力学極限と, 圧縮性流体の方程式(HDE(ε))から非圧縮性流体の方程式(VBE)を得る非圧縮極限の二つを繋げて, 弱非対称排他過程の経験分布が粘性項付きBurgers方程式の解への収束を示した.
- 最後に, 本研究に関わる重要な先行研究として,

[J. Quastel and H.-T. Yau. Ann. of Math. **148** (1998) 51–108]

を挙げたい. Quastelらは$d \geq 3$の場合に, 同種の考えを用いてミクロな粒子系の極限として非圧縮Navier-Stokes方程式を得た. 彼らの手法により粘性項付きBurgers方程式を得ることも, $d \geq 3$の場合には可能だが, $d = 1, 2$のときは可能でない. 粘性項付きBurgers方程式はNavier-Stokes方程式を簡略化した方程式であるとはいえ, $d = 1, 2$の場合にも得られたことは特筆すべき点である.

付録1: 流体力学極限

- 物理学において, 流体を支配するBurgers方程式やNavier-Stokes方程式をミクロな系から導出することは古典的な問題である.
- ミクロな系からマクロな系の基礎方程式を導出する方法の一つとして, 流体力学極限とよばれる手法(及び問題)が知られている.
- 例として, 弱非対称排他過程(ミクロな模型)と呼ばれる粒子系の粒子数密度は, 次の半線形放物型方程式(マクロな模型)の解に収束することが知られている:

$$\begin{cases} \partial_t u \ = \ \nabla \cdot [D(u) \nabla u] + \nabla \cdot [\sigma(u) \mathbf{m}] \ , \\ u(t, \cdot) \ = \ u_0(\cdot) \ . \end{cases} \qquad \text{(HDE)}$$

- 但しu_0は初期条件, $D = (D_{i,j} : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{i,j=1}^d$は拡散行列, $\sigma = (\sigma_{i,j} : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{i,j=1}^d$は流動率, $\mathbf{m} = (\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_d) \in \mathbb{R}^d$.

付録2: 非圧縮極限

- ここでは圧縮性流体から非圧縮性流体を導出する方法を述べる.
- d次元トーラス$\mathbb{T}^d = [0,1)^d$上で, $\varepsilon > 0$をパラメータとして持つ次の半線形放物型方程式を考える:

$$\begin{cases} \partial_t u \ = \ \nabla \cdot [D(u) \nabla u] + \varepsilon^{-1} \nabla \cdot [\sigma(u) \mathbf{m}] \ , \\ u(t, \cdot) \ = \ \alpha + \varepsilon v_0(\cdot) \ . \end{cases} \qquad \text{(HDE}(\varepsilon))$$

- 但し$v_0 : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$は初期条件, $\alpha \in \mathbb{R}$は簡単のため$\sigma'(\alpha) = 0$.
- このとき, D, σ, v_0に関する適当な仮定の下で, (HDE(ε))の解をu^εとしたとき, $\varepsilon^{-1}(u^\varepsilon - \alpha)$は$\varepsilon \to 0$の極限において粘性項付きBurgers方程式の解に収束する:

$$\begin{cases} \partial_t v \ = \ \nabla \cdot [D(\alpha) \nabla v] + (1/2) \nabla \cdot \left[v^2 \sigma''(\alpha) \mathbf{m} \right] \ , \\ v(t, \cdot) \ = \ v_0(\cdot) \ . \end{cases} \qquad \text{(VBE)}$$

- 圧縮性流体の方程式(HDE(ε))から非圧縮性流体の方程式が得られるため, このような極限は非圧縮極限とよばれる.