統計力学に現れる確率模型

角田　謙吉

2026/06/02

1　序

本稿では角田が最近興味を持っている確率論のある話題について説明する．意図的に物理学の用語を用いているが, 各用語には数学的な定義を与えているので, 定理 (予想) として述べている内容は数学的なものである．本稿の内容に少しでも興味をもって頂ければ幸いである.[1]

2　Curie–Weiss 模型

n を自然数とし, $+1$ と -1 からなる n 文字の列 $\omega = \omega_1 \cdots \omega_n$ を考える．実数 $\beta \geq 0$ に対し, 文字列 ω が選ばれる確率 $P_n^\beta(\omega)$ が次で与えられるとする．

$$P_n^\beta(\omega) := \frac{1}{Z_n^\beta} e^{-\beta \mathcal{H}_n(\omega)}, \quad \mathcal{H}_n(\omega) := -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j.$$

ここで Z_n^β は, $P_n^\beta(\omega)$ を 2^n 通りの ω について足したときに, 和が 1 になるような数である．

$$Z_n^\beta := \sum_\omega e^{-\beta \mathcal{H}_n(\omega)}.$$

ここで ω についての和は, 2^n 個の通り全てに対して取るものとする．次に, 文字列 ω に $+1$ と -1 が現れる平均の頻度を $m_n(\omega)$ と書くことにする．

$$m_n(\omega) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \omega_i.$$

$\mathcal{H}_n(\omega)$ の $+1$ と -1 についての対称性により, 文字列 ω が選ばれる確率 $P_n^\beta(\omega)$ と文字列 $-\omega$ が選ばれる確率 $P_n^\beta(-\omega)$ が等しいので, n が大きいときに $m_n(\omega)$ は高確率で 0 に近いと予想される．このことは正しいであろうか? 以下この問題について解説する．

[1] 集合の記法は大学新入生には慣れていないかもしれないが, 用いてしまった．本稿で用いる集合の記法は今後頻出するので, 慣れと思ってご容赦頂きたい．

この確率模型は **Curie–Weiss 模型**と呼ばれ, 確率論・統計力学・数理物理学において研究されており, 物理的には磁石の数学的模型と考えられる. 先に定義した各量には物理的な解釈があるので, それを紹介する. $i = 1, \ldots, n$ に対して文字 ω_i は, 位置 i にいる粒子が上を向いているか下を向いているかを表し, 各 ω_i は**スピン**と呼ばれる. $\mathcal{H}_n$ は**ハミルトニアン**と呼ばれ, 粒子が持つエネルギーを表す. 粒子のスピン配置 ω が選ばれる確率 P_n^β は, **Gibbs 測度**と呼ばれ, Z_n^β は**分配関数**と呼ばれる. 本稿では詳しく述べないが, この分配関数は様々な情報を持っているので, この関数を解析することは基本的な問題である. パラメータ β は, 温度を T としたとき $\beta = 1/T$ に相当するので, その名の通り**逆温度**と呼ばれる.[2] m_n は**平均磁化**と呼ばれる量である. 以下ではこれらの用語を用いる.

初めに $\beta = 0$ の場合に先の問題を考える. スピン配置 ω の取り方は 2^n 通りなので, 単に $P_n^0(\omega) = 2^{-n}$ となる. これはどの配置 ω も一様に (等確率で) 現れることを意味する. $\beta = 0$ は $T = \infty$ に相当するので, 温度が無限大の状況を考えていることに相当する. 温度が無限大なので各粒子間に相互作用はなく, 各粒子は $+1$ か -1 のスピンを等確率 $1/2$ で独立に取る. このような状況なので, 平均磁化 m_n は 0 に近いことが期待されるが, 実際に次が成立する.

定理 2.1 m_n は P_n^0 の下で 0 に確率収束する. つまり, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して次が成立する.[3]

$$\lim_{n\to\infty} P_n^0\left(\omega : |m_n(\omega)| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

一方, $\beta > 0$ の場合には各粒子間には相互作用があるので, 状況は $\beta = 0$ のときほど単純でない. 相互作用の影響で, 配置 ω が選ばれる確率は一様ランダムではなく, エネルギーの低い配置が起こりやすいように選ばれる. どのような相互作用かと言うと, (ハミルトニアン $\mathcal{H}_n$ と Gibbs 測度 P_n^β の符号に注意して) ω_i と ω_j のスピンの値が揃っている配置程, $P_n^\beta(\omega)$ の値は大きくなるような相互作用である. このように, ハミルトニアン $\mathcal{H}_n$ の影響で各粒子にはスピンを揃える効果がある一方, 温度無限大の状況のように各粒子はスピンを独立に取る効果も残っている. この二つの効果の競合のために, 平均磁化がどのようになるかは非自明になる. 事実として, この確率模型は逆温度 β について次の様に変化することが知られている.

定理 2.2 次が成立する.

(i) $0 \leq \beta \leq 1/2$ のとき, m_n は P_n^β の下で 0 に確率収束する.

(ii) $\beta > 1/2$ のとき, ある $m(\beta) > 0$ が存在して, 十分小さい任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P_n^\beta\left(\omega : |m_n(\omega) - m(\beta)| \leq \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} P_n^\beta\left(\omega : |m_n(\omega) + m(\beta)| \leq \varepsilon\right) = \frac{1}{2}.$$

定理 2.2 が述べていることについて説明する. (i) β が小さいとき (十分高温のとき) は, 相互作用があるものの平均磁化は n が大きければ高確率で 0 に近い. 一方, (ii) β が大きいとき (十分低温のとき) は, 相互作用の影響により平均磁化は高確率で $m(\beta)$ か $-m(\beta)$ の近くに集

[2] $\beta = 1/T$ なので, 温度 T が高いほど逆温度 β は小さい.

[3] $P_n^0\left(\omega : |m_n(\omega)| \geq \varepsilon\right)$ は $|m_n(\omega)| \geq \varepsilon$ となる確率を表す.

中する (永久磁石の発生). このように $\beta_c = 1/2$ を境に平均磁化の振る舞いは劇的に変化する.[4] このような現象は**相転移現象**と呼ばれ, 相転移の境となる逆温度 β_c を**臨界逆温度**と呼ぶ.

Curie–Weiss 模型において, i にいる粒子は j $(j \neq i)$ いる他の粒子全てと相互作用するので, この確率模型は**平均場模型**とも呼ばれる. そのような状況は理想的過ぎて, 実際の物理現象を表しているとは考えにくいので, 隣にいる粒子のみと相互作用を持つ確率模型を考察することは自然である. そのような確率模型が次に説明する, **Ising 模型**である.

3 Ising 模型

次に考える確率模型である Ising 模型は, ハミルトニアンを次のように定義したものである.

$$\mathcal{H}_n(\omega) := -\sum_{i=1}^{n} \omega_i \omega_{i+1}.$$

但し, $\omega_{n+1} = \omega_1$ としている. この状況は, 1 次元の円周上で隣にいる粒子のみと相互作用を持つ状況 (周期境界条件と呼ばれる) と考えられる. ハミルトニアンが定義されれば, Curie–Weiss 模型と同様に Gibbs 測度・分配関数・平均磁化が定義される.

$$P_n^\beta(\omega) := \frac{1}{Z_n^\beta} e^{-\beta \mathcal{H}_n(\omega)}, \quad Z_n^\beta := \sum_{\omega} e^{-\beta \mathcal{H}_n(\omega)}, \quad m_n(\omega) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \omega_i.$$

1 次元の Ising 模型は相転移を起こすだろうか. 次の定理から分かるように, 相転移を起こさないことが知られている.

定理 3.1 任意の $\beta \geq 0$ に対して, m_n は P_n^β の下で 0 に確率収束する.

このように 1 次元の Ising 模型は相転移を起こさない. しかしながら, d 次元の Ising 模型 $(d \geq 2)$ を考えると, ある臨界逆温度 $\beta_c^d > 0$ を境に, Curie–Weiss 模型と同様な相転移を起こすことが知られている.[5]

4 スピン系の揺らぎの普遍性

Curie–Weiss 模型における臨界逆温度は $\beta_c = 1/2$ であった. 一方, d 次元 Ising 模型 $(d \geq 2)$ における臨界逆温度 β_c^d の具体的な値は, $d = 2$ の場合を除いて知られていない.[6] 臨界逆温度は確率模型を定義する細かい情報 (例えば格子の形, 相互作用領域など) に依存するが, 物理的には "似た様な確率模型" であれば, 共通して観測される現象があると信じられている. これを**普遍性**という.

普遍性の一例として次が挙げられる. 逆温度 β が β_c^d よりも真に小さい場合には, 平均磁化周りの揺らぎは, 次の定理のように Gauss 分布により記述される.

[4] この場合には, β_c を境にスピン平均 m_n が 0 から非 0 になっている.

[5] 2 次元の Ising 模型の場合には, 格子上の隣の点が 4 つあるので, 4 つの粒子と相互作用をするようにハミルトニアンを定めて, Gibbs 測度を定義すればよい.

[6] $d = 2$ は都合により非常に特殊である.

定理 4.1 d 次元 Ising 模型において $0 \leq \beta < \beta_c^d$ とする.[7] このとき, ある $\sigma_\beta^d > 0$ が存在して, 任意の $-\infty < a < b < \infty$ に対して次が成立する.

$$\lim_{n\to\infty} P_n^\beta \left(\omega : a \leq n^{1/2} m_n(\omega) \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\beta^d}} \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_\beta^d}\right) dx.$$

定理 4.1 の極限において Gauss 分布が現れるが, 各粒子は独立ではないにも関わらず中心極限定理と同様の現象が起こる.[8] [9] σ_β^d の値は次元 d や逆温度 β に依存するものの, 高温領域 (つまり β が小さい) において極限に現れる確率分布は常に Gauss 分布である. このことからもわかるように, Gauss 分布はこのような確率模型の極限において普遍的に現れる.

それでは $\beta = \beta_c^d$ の場合には何が起こるだろうか? この問題に対して多くの研究が行われてきたが, 未だ数学的に理解されていないことが多い. そのような先行研究から予想されることとして, 平均磁化周りの揺らぎに対して, 次が成立するであろうと予想されている.

予想 4.1 $d \geq 5$ 次元の Ising 模型において $\beta = \beta_c^d$ とする. このとき, ある $\alpha > 0$ が存在して, 任意の $-\infty < a < b < \infty$ に対して次が成立する.

$$\lim_{n\to\infty} P_n^\beta \left(\omega : a \leq n^{3/4} m_n(\omega) \leq b\right) = \frac{1}{Z} \int_a^b \exp\left(-\frac{x^4}{\alpha}\right) dx.$$

但し, Z は正規化定数 $Z = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^4}{\alpha}\right) dx$ である.

平均場模型に対しては, この予想が成立することが知られている. 高次元 $(d \geq 5)$ の Ising 模型の場合にも同じことが成立すると期待されているが, **現在も未解決の問題**である.

5 最後に

Curie–Weiss 模型や Ising 模型は, 確率論・統計物理学・数理物理学において非常に基本的な模型であり, 現在でも重要な研究対象として様々な研究が行われている.[10] この確率模型が重要と見なされる分かりやすい例として, Hugo Duminil-Copin 氏は今回紹介した普遍性に関連する研究を評価され, 2022 年に Fields 賞を受賞していることが挙げられる. この例からも分かるように, 重要な研究対象として考えられている問題と言える. 角田は Ising 模型等のスピン系の専門家ではないが, 最近の研究でこの話題に関連することに触れたこともあり, 今回題材として用いた. この話題に読者が少しでも興味を持って頂ければ幸いである.

[7] $d = 1$ のときは $\beta_c^1 = \infty$ とする.

[8] 中心極限定理については, 数学科の確率・統計の講義で学ぶ.

[9] 独立な場合の中心極限定理の拡張とみなせる.

[10] Ising 模型は, 数学科の学生よりも物理学科の学生の方が知っている, 超有名な確率模型である.