排他過程に対するスケール極限

角田 謙吉 (大阪大学理学研究科数学専攻)*

概　要

We discuss in this talk recent progress on scaling limits for exclusion processes. In particular, this talk shall focus on some sort of law of large numbers for the empirical measure of the particle system, which is often referred to as hydrodynamic limit. Corresponding fluctuations and large deviations are also discussed. The scaling limits for additive functionals and a tagged particle are also mentioned.

1. 初めに

本稿では排他過程に対するスケール極限について述べる. 特に扱われるのは, 粒子数密度に対応する経験分布, 微視的な量である占有時間, 着目粒子などである. 節 2 では排他過程を定義し, 排他過程の基本的な性質などを述べる. 節 3 では Kipnis, Varadhan [33] による加法的汎関数に対する中心極限定理について述べる. 節 4 では経験分布に対するスケール極限が, 節 5 では占有時間や着目粒子に対するスケール極限がそれぞれ述べられる.

注意として, 関連する研究であっても紙面数の都合上述べられなかったものが多くある. 例えば, 排他過程の可積分系としての話題や熱の異常拡散の話題は, 近年活発に研究されているが, それらの話題については本稿では取り扱わない. [1][2] より密接に関連している話題とすると, 例えば非対称な場合の経験分布に対するスケール極限についても取り扱わない. 節 4 や節 5 で説明される内容の多くは, Kipnis, Landim [30] や Komorowski, Landim, Olla [34] においてそれぞれ詳しく解説されているので, 興味のある人はこれらを参照して頂きたい.

2. 排他過程

本節では本稿を通して議論される排他過程について述べる. $d \in \mathbb{N}$ を空間次元とし, X を直積空間 $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ とする. X は直積位相によりコンパクトな完備可分距離空間になる. X は配置空間, その元は配置とそれぞれよばれ, $\eta = \{\eta(x)\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$ とかくことにする. 解釈として, $\eta(x) = 1$ は x に粒子があり, $\eta(x) = 0$ は x に粒子がない, と考える. X 上の関数 f が局所関数であるとは, ある $r > 0$ が存在して f の値が $\{\eta(x) : |x| \le r\}$ のみで決まることである. $\mathcal{C}$ を X 上の局所関数全体とする. 節 4 では周期境界領域 $\mathbb{T}_N^d = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d$ 上の排他過程を考えるが, 記号の煩雑化を避けるためどちらの場合でも同じ記号を用いることにする. ただし, スケールパラメター $N \in \mathbb{N}$ への依存性がある場合には, N を付与してかくことにする.

---

* 〒560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-1 大阪大学大学院理学研究科数学専攻
e-mail: `k-tsunoda@math.sci.osaka-u.ac.jp`
web: `http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~tsunoda/`

[1] 排他過程に対するスケール極限に話題を限定したとしても, 筆者がこの話題について網羅的に述べることが可能かどうか甚だ疑問である.

[2] 節 4 や節 5 の内容に密接に関連するものでも, 紹介していないものもある. 興味のある人は筆者にお尋ね下さい.

初めに一つの粒子に対する推移確率を導入しよう. $p : \mathbb{Z}^d \to [0,1]$ を次の条件を満たす関数とする:

(A1) $\displaystyle\sum_{z\in\mathbb{Z}^d} p(z) = 1$ かつ $p(0) = 0$.

(A2) 任意の $x \in \mathbb{Z}^d$ に対して, ある $M \in \mathbb{N}$ とある列 $0 = x_0, x_1, \ldots, x_M = x$ が存在して, 任意の $0 \le i \le M-1$ に対して $p(x_{i+1} - x_i) + p(x_i - x_{i+1}) > 0$.

(A3) ある $R > 0$ が存在して, 任意の $|z| \ge R$ に対して $p(z) = 0$.

(A1)の仮定は本質的ではないが, 便宜上仮定しておく.[3] (A2)の仮定はエルゴード性のために必要である(cf. Proposition 5.2). 本稿では(A3)の仮定がある場合のみを考えるが, (A3)の仮定はスケール極限に本質的に影響することに注意しておく. 例えばGonçalves, Jara [18]を参考にあげておく.[4]

排他過程は X 上の Markov 過程として定義される. ここでは対応する生成作用素を定義しよう. $f \in \mathcal{C}$ に対して X 上の関数を次で定義する:[5]

$$Lf(\eta) \ = \ \sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\sum_{z\in\mathbb{Z}^d} p(z)\eta(x)[1-\eta(x+z)][f(\eta^{x,x+z}) - f(\eta)] \ . \tag{1}$$

ただし, $x, y \in \mathbb{Z}^d, \eta \in X$ に対して $\eta^{x,y}$ は x と y における配置変数を交換して得られる配置である:

$$\eta^{x,y}(z) \ = \ \begin{cases} \eta(y) \ , & z = x \ , \\ \eta(x) \ , & z = y \ , \\ \eta(z) \ , & z \neq x, y \ . \end{cases}$$

上の定義では配置空間上の時間発展(対応する生成作用素)を考えているので, 一つ一つの粒子の位置の時間発展を見ていないことに注意して頂きたい. ただし小節 5.2 では排他過程において一つの粒子(着目粒子)の時間発展を考えるが, 一つの粒子の位置の時間発展と残りの粒子の時間発展を与えることは容易にできるため, 小節 5.2 ではそのように排他過程を構成しているものとする.

$C(X)$ を X 上の連続関数全体とすると, $\mathcal{C}$ で定義された線形作用素 L は Markov 前生成作用素であることが確かめられ, その閉包作用素を再び L でかくと, L は $C(X)$ 上の Markov 生成作用素であって $\mathcal{C}$ は L に対する core となる.[6] L に対応する X 上の(標準的な)Markov 過程を $\{\eta_t : t \ge 0\}$ とかくことにする.[7] X 上の確率測度 ν に対して, 初期分布を ν とする $\{\eta_t : t \ge 0\}$ の分布を $\mathbb{P}_\nu$ で表し, $\mathbb{P}_\nu$ についての平均を $\mathbb{E}_\nu$ で表す.

(1)の生成作用素に対応する Markov 過程は次のように捉えられる: 「各粒子は独立でレート 1 の Poisson 時計を持っており, その時計が鳴ったとき推移確率 p に従って移動する. ただし, 移動先の頂点に他の粒子があれば, そのジャンプは行われない」

---

[3] 本当に不要である.

[4] p が長距離ジャンプを許す場合には, Lévy 型のスケール変換になることは自然であろう.

[5] 仮定(A3)の下では(1)の右辺は有限和なので, 任意の $f \in \mathcal{C}$ に対して $Lf \in \mathcal{C}$ である,

[6] 以下でも講演者が適切な日本語訳を知らない場合には英語のままかくことにする.

[7] $\mathbb{Z}^d$ の代わりに有界領域上で排他過程を考えると, 状態空間は有限だから単に連続時間 Markov 連鎖である.

一方 p が対称, つまり, 任意の $z \in \mathbb{Z}^d$ に対して $p(z) = p(-z)$ である場合には, 排他過程を別の粒子系として捉えることができる. このことをみるために, 生成作用素 (1) を次のように変形しておく:

$$Lf(\eta) \ = \ \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} p(z)[f(\eta^{x,x+z}) - f(\eta)] \, , \tag{2}$$

この式は, p が対称であることと, 任意の $x, z \in \mathbb{Z}^d$ に対して

$$\{\eta(x)[1-\eta(x+z)] + \eta(x+z)[1-\eta(x)]\} \, [f(\eta^{x,x+z}) - f(\eta)] \ = \ [f(\eta^{x,x+z}) - f(\eta)] \, ,$$

となることからわかる. (2) より, 次のように時間発展を捉えることもできる: 「各辺 $\{(x, x+z) : x, z \in \mathbb{Z}^d\}$ は独立でレート $p(z)/2$ の Poisson 時計を持っており, その時計が鳴ったとき辺の始点と終点の配置変数を交換する」対称な場合にはこのような見方を基に排他過程を構成することもでき, その際は stirring dynamics とよばれる. この見方によると各粒子は $\mathbb{Z}^d$ 上を連続時間ランダムウォークしているだけなので, ある種粒子間の相互作用はないものとみなせる. このような事情もあり対称排他過程に対する (後述の) 流体力学方程式は線形の熱方程式になる. stirring dynamics としての見方は, 問題によっては有用である. 例として Peligrad, Sethuraman [39] を参考にあげておく.

次に排他過程の定常状態について述べる. $0 \le \alpha \le 1$ に対して ν_α を平均 α の X 上の直積 Bernoulli 測度とする:[8]

$$\nu_\alpha(\eta : \eta(x) = 1) \ = \ \alpha \, , \quad x \in \mathbb{Z}^d \, .$$

任意の $0 \le \alpha \le 1$ に対して ν_α は L に対する不変測度であるが, 仮定 (A3) の下ではエルゴード的であることがわかる. また $L^2(\nu_\alpha)$ を X 上の可測関数であって ν_α に対して二乗可積分になるもの全体とする.[9] $L^2(\nu_\alpha)$ の内積は $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ とかくことにする. ν_α が不変測度であることを用いると, L に対応する $C(X)$ 上の半群は, $L^2(\nu_\alpha)$ 上に拡張されることがわかる. $L^2(\nu_\alpha)$ 上の半群としての生成作用素を再び L でかくと, $\mathcal{C}$ は $L^2(\nu_\alpha)$ 上の半群としても L に対して core であることがわかる. $D(L) \subset L^2(\nu_\alpha)$ を L の定義域とする. L が対称であるための条件は p が対称であることが知られている.

本稿を通して用いられる用語についてここで述べておく.[10] 排他過程が平衡系であるとは, 初期分布が $\nu_\alpha, \alpha \in [0,1]$ となることである. 一方 N をスケールパラメターとして, 排他過程が非平衡系であるとは, ある連続関数 $\rho_0 : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ に対して初期分布が次で与えられる X 上の直積 Bernoulli 測度 $\nu^N_{\rho_0(\cdot)}$ となることである.

$$\nu^N_{\rho_0(\cdot)}(\eta : \eta(x) = 1) \ = \ \rho_0(x/N) \, , \quad x \in \mathbb{Z}^d \, .$$

また分散を計算することにより, 任意の $G \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ と任意の $\delta > 0$ に対して,

$$\lim_{N \to \infty} \nu^N_{\rho_0(\cdot)} \left(\left| \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \eta(x) G(x/N) - \int_{\mathbb{R}^d} \rho_0(u) G(u) du \right| \ge \delta \right) \ = \ 0 \, ,$$

であることがわかる. ただし, du は d 次元の Lebesgue 測度である. このことから $\nu^N_{\rho_0(\cdot)}$ は局所平衡測度とよばれることもある.

[8] α は粒子系の平均密度と考えられる.
[9] 勿論ほとんどいたるところ ν_α で一致する関数は同一視する.
[10] 一般的な用語ではない. 非平衡系といえば初期分布が平衡状態でない, と解釈する方が一般的である.

3. Kipnis-Varadhan理論

本節ではKipnis, Varadhan [33]によるMarkov過程の加法的汎関数に対する中心極限定理について述べる. 彼らの研究は一般論と具体的な模型への応用からなっている. 本稿では一般論の枠組みで述べることは避け, 排他過程に対して述べることで彼らのアイデアを紹介する. 小節5.2では着目粒子に対しても応用できることを紹介する.[11]

本節では平衡系のみを考えるので, 本節を通して粒子数密度は$\alpha \in [0,1]$に固定する. ν_αは不変測度であったから, 任意の$t \geq 0$に対してη_tの分布はν_αであることに注意する. $V \in D(L)$を取り固定する. 加法的汎関数

$$\int_0^t V(\eta_s)ds \ , \tag{3}$$

を導入しよう. 本節の目的は(3)の$t \to \infty$における長時間挙動を決定することである. 典型的な例として原点における占有時間

$$\int_0^t \eta_s(0)ds \ ,$$

をあげておく. 占有時間については小節5.1において詳しく述べる.

加法的汎関数に対する長時間挙動として大数の法則は考えることは, 最も基本的と思われるが, 大数の法則はエルゴード定理により直ちに得られる. 実際, ν_αは排他過程のエルゴード測度であったから, エルゴード定理より$t \to \infty$において

$$\frac{1}{t}\int_0^t V(\eta_s)ds \ \to \ \int_X V d\nu_\alpha \ , \quad \text{a.s. and in } L^1 \ , \tag{4}$$

が成立する.

大数の法則が示されると, 次の問題として中心極限定理や大偏差原理が自然に考えられる. (4)を考慮すれば中心極限定理を考える上では$\int_X V d\nu_\alpha = 0$として一般性を失わない. 以上により, $\int_X V d\nu_\alpha = 0$なる$V \in D(L)$に対して

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t V(\eta_s)ds \ ,$$

が$t \to \infty$において正規分布に分布収束するかどうかが次の問題として考えられる. この問題にKipnisとVaradhanは解答を与えた.

彼らによるアイデアをみるために, 初めにPoisson方程式

$$-Lf \ = \ V \ ,$$

が$f, f^2 \in D(L)$となる解fをもつときを考えよう. Dynkinマルチンゲールを,

$$M_t^f \ = \ f(\eta_t) - f(\eta_0) - \int_0^t (Lf)(\eta_s)ds \ , \tag{5}$$

とおくと, 次の分解を得る:

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t V(\eta_s)ds \ = \ \frac{1}{\sqrt{t}}\left[M_t^f - f(\eta_t) + f(\eta_0)\right] \ . \tag{6}$$

[11] 排他過程における着目粒子の問題に応用する上で一般論を展開した, と言った方が正しいだろう.

平衡系を考えていたので,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbb{E}_{\nu_\alpha}\left[f(\eta_t)^2\right]}{t} \;=\; \lim_{t\to\infty}\frac{\mathbb{E}_{\nu_\alpha}\left[f(\eta_0)^2\right]}{t} \;=\; 0\ .$$

一方マルチンゲール中心極限定理から $t^{-1/2}M_t^f$ は分散

$$\sigma^2(V) \;=\; \lim_{t\to\infty}\frac{\mathbb{E}_{\nu_\alpha}[(M_t^f)^2]}{t}\ ,$$

の正規分布に分布収束する. M_t^f の二次変分は $f^2\in D(L)$ であれば

$$\langle M^f\rangle_t \;=\; \int_0^t \Big[(Lf^2)(\eta_s) - 2f(\eta_s)(Lf)(\eta_s)\Big]\,ds\ ,$$

により与えられるので, これから

$$\mathbb{E}_{\nu_\alpha}[(M_t^f)^2] \;=\; 2t\langle f,(-Lf)\rangle_\alpha\ , \quad t\ge 0\ , \tag{7}$$

が得られる.[12] 以上により $\sigma^2(V)=2\langle f,(-Lf)\rangle_\alpha$ となる. また形式的には $f=(-L)^{-1}V$ であるから, $\sigma^2(V)=2\langle V,(-L)^{-1}V\rangle_\alpha$ と考えられる.

ここまでで, Poisson 方程式 $-Lf=V$ が $f, f^2\in D(L)$ となる解 f をもつときには, 極限の分散を $\sigma^2(V)=2\langle V,(-L)^{-1}V\rangle_\alpha$ として加法的汎関数 (3) に対して中心極限定理が成立することをみた. Kipnis と Varadhan は "$\langle V,(-L)^{-1}V\rangle_\alpha$" が意味を持つ V に対しては同様に中心極限定理が成立することを示した.

このことを正確にみるために, $V\in L^2(\nu_\alpha)$ に対して

$$\|V\|_{-1}^2 \;=\; \sup_{g\in\mathcal{C}}\left\{2\langle V,g\rangle_{\nu_\alpha} - \langle g,(-L)g\rangle_{\nu_\alpha}\right\}\ ,$$

と定義しよう. 形式的にはこの sup は $g=(-L)^{-1}V$ のときに達成されるので, $\|V\|_{-1}^2 = \langle V,(-L)^{-1}V\rangle_{\nu_\alpha}$ である. また H_{-1} を $L^2(\nu_\alpha)$ に属す関数 V であって, $\|V\|_{-1}$ が有限となるもの全体とする.[13] $V\in H_{-1}$ ならば $\int_X V\,d\nu_\alpha=0$ であることは簡単にわかる. このとき, Kipnis と Varadhan は $V\in H_{-1}$ の加法的汎関数に対して中心極限定理を示した.

Theorem 3.1 p は対称であると仮定し, $V\in H_{-1}$ とする. このとき, 加法的汎関数 (3) は $t\to\infty$ において平均 0, 分散 $\sigma^2(V)=2\|V\|_{-1}^2$ の正規分布に分布収束する.[14]

Theorem 3.1 により, H_{-1} に属す関数については中心極限定理が成立することがわかった. しかしながら V が局所関数かつ $\int_X V\,d\nu_\alpha=0$ であっても, $V\notin H_{-1}$ となるものが存在する. $d=1,2$ のときの占有時間がそのような例である. これについては小節 5.1 で紹介する.

先に述べたように p が対称であるということは, 排他過程の生成作用素 L が対称であることと同値である. Kipnis と Varadan による手法は非対称である場合についても適用することが可能であるが, その際には対称性に代わる何かしらの性質が必要である.

[12] (7) をみると, 条件 $f^2\in D(L)$ は不要にみえる. 実際 $\mathcal{C}$ の元で f を近似すれば, この議論においても $f^2\in D(L)$ は不要であることがわかる.

[13] ここでは簡単のために H_{-1} の定義を少し変えた. H_{-1} のヒルベルト空間としての定義については Komorowski, Landim, Olla [34, Chapter 2] を参照して頂きたい.

[14] 極限の分散は α に依存することに注意.

例えば, $\sum_z zp(z)=0$ の場合には sector condition を用いると, Theorem 3.1 の帰結を示すことができる.[15][16] 非対称性が更に強い $\sum_z zp(z)\neq 0$ の場合にも, $d\geq 3$ であれば Theorem 3.1 の帰結が成立することが知られている. 詳細や関連する研究については Komorowski, Landim, Olla [34, Chapter 5] を参照して頂きたい.

Theorem 3.1 の証明の方針を簡潔に述べよう. リゾルベント方程式

$$(\lambda - L)f_\lambda \ = \ V \ , \quad \lambda > 0 \ ,$$

の解を f_λ として, Dynkin マルチンゲール M^{f_λ} の $\lambda\to 0$ における極限をとると, (6) のようなマルチンゲールと剰余項による分解を得る. 剰余項は然るべき意味で消えるので, 結局マルチンゲール中心極限定理に帰着するのである. 本稿ではこれ以上詳しくみない代わりに, 本節の残りで Theorem 3.1 の証明において基本的な役割を果たす不等式を紹介したい. 近年では Kipnis-Varadan 不等式とよばれ, 中心極限定理などの揺動に関する問題において広範な汎用性を持つ.

Lemma 3.2 $T>0, V\in H_{-1}$ とする. このとき,

$$\mathbb{E}_{\nu_\alpha}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_0^t V(\eta_s)ds\right)^2\right] \ \leq \ 24T\|V\|_{-1}^2 \ .$$

が成立する.

この不等式は, 加法的汎関数の分散を関数 V の H_{-1} ノルムで評価するというものであり, 様々な問題に対して有用である. 粒子系の関連する問題への応用とすると, 流体力学極限に対する揺動の問題に対して用いられる (cf. 小節 4.2). また形式的には $\|V\|_{-1}^2 = \langle V, (-L)^{-1}V\rangle_{\nu_\alpha}$ であったから, $-L$ の第二最小固有値の下からの評価があれば, H_{-1} ノルムの上からの評価へと自然に結びつくことについても注意しておく.

4. 流体力学極限及び関連するスケール極限

節 3 では加法的汎関数とよばれる, 粒子系から決まる微視的な量に対する極限定理について述べた. 本節では粒子系から決まる巨視的な量である, 粒子数密度 (経験分布) に対するスケール極限について述べる. 小節 4.1 で述べられる流体力学極限は, 非平衡系における問題を考えていることに注意する.[17] 一方小節 4.2 における揺動の問題は, 平衡系, 非平衡系のどちらでも意味を持つ問題であるが, 後者では技術的に難しい点が多い. 小節 4.3 における大偏差原理の問題は, 平衡系を扱っても問題の側面上非平衡系を取り扱う必要がある.

本節では記法の簡単化のために周期境界領域 $\mathbb{T}_N^d=(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d=\{0,1,\ldots,N-1\}^d$ 上の排他過程を取り扱うこととする.[18] ここで $N\in\mathbb{N}$ はスケールパラメターである. 初めに本節で扱う粒子系を導入しよう.

$\{\eta_t^N : t\geq 0\}$ を $X_N=\{0,1\}^{\mathbb{T}_N^d}$ 上の Markov 過程で生成作用素が

$$L_N f(\eta) \ = \ \frac{N^2}{2}\sum_{x\in\mathbb{T}_N^d}\sum_{z\in\mathbb{Z}^d:|z|=1}\left[f(\eta^{x,x+z})-f(\eta)\right] , \tag{8}$$

[15] sector condition は本質的には Varadhan [46] により示されている.
[16] p が対称ならば $\sum_z zp(z)=0$ である.
[17] 流体力学極限は平衡系であればエルゴード定理より自明な問題である.
[18] 対称排他過程の場合には本節で紹介される定理は全て, 適当な設定の下で $\mathbb{Z}^d$ 上の場合にも成立する.

で与えられるものとする. ここで f は X_N 上の関数である. $\mathbb{T}_N^d$ と $\mathbb{Z}^d$ の元の和は N を法として考えるものとする. (8) は, (2) において $|z|=1$ のとき $p(z)=1/2d$, としたものを $2dN^2$ 倍したものであるが, N^2 倍されていることのみが本質的であることに注意する.[19] これにより時間に対するスケール変換が導入され, 後に導入する空間に対するスケール変換 $x \mapsto x/N$ と合わせて, 拡散型のスケール変換となるのである. 本節では $T>0$ を固定して, 排他過程は全て時間区間 $[0,T]$ 上で考えるものとし, 常に非平衡系を扱うものとする.[20] [21]

4.1. 流体力学極限

定理の紹介のため記号の導入から初めたい. $\mathbb{T}^d=(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d=[0,1)^d$ を d 次元連続トーラス, $\mathcal{M}_+$ を $\mathbb{T}^d$ 上の測度で全測度が 1 以下となるもの全体とする. $\mathcal{M}_+$ には弱収束による位相を導入しておく.[22] 配置 $\eta \in X_N$ に対して, 経験分布とよばれる $\mathbb{T}^d$ 上の測度を

$$\pi^N(\eta; du) \;=\; \frac{1}{N^d}\sum_{x\in\mathbb{T}_N^d}\eta(x)\delta_{x/N}(du) \;,$$

により定義する. ただし, $u\in\mathbb{T}^d$ に対して δ_u は $u\in\mathbb{T}^d$ に集中する Dirac 測度である. 経験分布の定義中の $x\in\mathbb{T}_N^d \mapsto x/N\in\mathbb{T}^d$ により空間に対するスケール変換が導入されていることに注意して頂きたい.

一般に完備可分距離空間 E に対して, $D([0,T],E)$ により $[0,T]$ 上で定義された E 値関数であって, 全ての点で右連続かつ左極限が存在するもの全体とする. $D([0,T],E)$ には Skorokhod 位相を導入しておく. Q^N を $D([0,T],\mathcal{M}_+)$ 値過程 $\pi_\cdot^N$ により導入される $D([0,T],\mathcal{M}_+)$ 上の分布とする.

初めに流体力学極限とよばれる, 大数の法則に相当する結果について紹介する. 次の定理では, $\rho:[0,T]\times\mathbb{T}^d\to[0,1]$ を Cauchy 問題

$$\begin{cases}\partial_t\rho \;=\; \Delta\rho\;, \\ \rho(0,\cdot) \;=\; \rho_0(\cdot)\;,\end{cases} \tag{9}$$

の一意的な弱解とする.[23] ただし Δ は $\mathbb{T}^d$ 上のラプラス作用素である.

Theorem 4.1 $D([0,T],\mathcal{M}_+)$ 上の確率測度の列 $\{Q^N\}_{N\in\mathbb{N}}$ は $N\to\infty$ において, $\{\rho(t,u)du : t\in[0,T]\}$ に集中する $D([0,T],\mathcal{M}_+)$ 上の Dirac 測度に弱収束する.

Theorem 4.1 の帰結として, 時刻 $t\in[0,T]$ における収束についても直ちに得られる.

Corollary 4.2 任意の $t\in[0,T]$ と任意の $G\in C^\infty(\mathbb{T}^d)$ に対して, $N\to\infty$ において確率収束の意味で,

$$\frac{1}{N^d}\sum_{x\in\mathbb{T}_N^d}\eta_t^N(x)G(x/N) \;\to\; \int_{\mathbb{T}^d}G(u)\rho(t,u)du\;,$$

が成立する.[24]

---

[19] $2d$ 倍は係数の簡単化のためであり, 本質的でない.
[20] 既にスケール変換を行っているので, $[0,T]$ は巨視的な時間区間である.
[21] 本節での $\nu^N_{\rho_0(\cdot)}$ は X 上の確率測度ではなく, X_N 上の確率測度であることを注意しておく.
[22] よく知られているように, 適当な距離を導入すれば $\mathcal{M}_+$ は完備可分距離空間となる.
[23] この場合には単に熱方程式なので実際は強解になっている.
[24] つまり, ランダム測度 $\pi_t^N(du)$ が $\rho(t,u)du$ に $\mathcal{M}_+$ において確率収束している.

Theorem 4.1の証明は[30, Chapter 4]を参照して頂きたい.[25] Theorem 4.1の証明のためには, 局所エルゴード性による平均化を行う必要はないことに注意しておく. それは, 経験分布に対するDynkinマルチンゲールを計算すると, 経験分布に対する閉じた方程式として線形の熱方程式が得られるからである. これは対称排他過程がstirring dynamicsの構造をもつことに起因している.

流体力学極限を解析するための有名な手法として, Guo, Papanicolaou, Varadhan [21]による手法と, Yau [44]による手法が知られている. どちらも最初は勾配型とよばれる条件を満たす系に対して導入されたが, 後にVaradhan [45]により勾配型とは限らない系に対する手法が導入された. これらの手法や関連する話題についてはSpohn [42]やKipnis, Landim [30]による教科書を参照して頂きたい. また日本語の文献では, 舟木, 内山 [15, 16]がある.[26]

Yauの手法に基づくと, μ_t^Nを時刻$t \in [0,T]$におけるη_t^NのX_N上の分布とすれば,

$$H_N(\mu_t^N | \nu_{\rho_t(\cdot)}^N) \ = \ o(N^d) \ , \tag{10}$$

を得ることができる.[27] ここで, X_N上の確率測度μ, νに対して$H_N(\mu|\nu)$は相対エントロピー

$$H_N(\mu|\nu) \ = \ \sup_f \left\{ \int f d\mu - \log \int e^f d\nu \right\} \ ,$$

である. ただしsupはX_N上の関数全てに渡る. Yauによる評価(10)はCorollary 4.2を得るために十分なものである.[28]

近年Yauの手法による評価(10)がJara, Menezes [27, 28]により改善され, 相対エントロピーに対する評価として

$$H_N(\mu_t^N | \nu_{\rho_t(\cdot)}^N) \ = \ O(g_d(N) N^{d-2}) \ , \tag{11}$$

が得られた. ここで, $g_d(N)$は次で与えられる:

$$g_d(N) \ = \ \begin{cases} N \ , & d = 1 \ , \\ \log N \ , & d = 2 \ , \\ 1 \ , & d \geq 3 \ . \end{cases}$$

正確にはJara, Menezes [27, 28]は別の模型に対してこの評価を示しているが, 対称排他過程の場合にも(9)を得ることは可能である. (10)に比べると(11)は評価が精密であり, JaraとMenezesはこの評価を用いて非平衡揺動を示している. これについては小節 4.2で再度述べることにする. またJaraとMenezesのアイデアを援用することにより, Funaki, Tsunoda [14], Jara, Landim, Tsunoda [26], De Masi, Funaki, Presutti, Vares [11] などでは, 流体力学極限と流体力学方程式に対する特異極限を繋

[25] Theorem 4.1の証明は非常に簡単であるため, 歴史的に重要というわけではない.

[26] 後の小節4.2と4.3においても多くの文献をあげることはせず, 筆者の偏見による代表的なもののみをあげる. それらの問題についてもこれらの文献を参照して頂きたい.

[27] 正確には初期時刻における関数ρ_0の滑らかさに関する仮定が必要である. (11)についても同様.

[28] 実際には更に強い主張を得ることができる. 例えばKipnis, Landim[30, Corollary 6.1.3]を参照して頂きたい.

げたスケール極限が調べられている．一方, Jara と Menezes による手法は不変測度が直積である模型に対してのみ計算が行われている．不変測度が Gibbs 測度で与えられるような一般的な場合に, (11) のような評価が得られるかどうかは, 近い将来の問題である．

4.2. 経験分布に対する揺動

Theorem 4.1 は大数の法則に相当するので, 流体力学方程式の解からの揺動や偏差を考えることは自然である．そのため次に揺動の問題について述べよう．流体力学極限を考える際に経験分布を導入したが, 揺動の問題では超関数と捉えた方が都合がよいので, 初めに超関数の空間を導入しよう．

$k \in \mathbb{N}$ に対して, $\mathcal{H}_k$ を次の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ により $C^\infty(\mathbb{T}^d)$ を完備化して得られるヒルベルト空間とする:

$$\langle f, g \rangle_k \;=\; \langle f, (1-\Delta)^k g \rangle \,.$$

ただし, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $L^2(\mathbb{T}^d, du)$ の内積である．このとき, $\mathcal{H}_{-k}$ を $\mathcal{H}_k$ の双対空間, $\mathcal{H}_0 = L^2(\mathbb{T}^d)$ とそれぞれおけば, よく知られているように

$$\cdots \;\subset\; \mathcal{H}_2 \;\subset\; \mathcal{H}_1 \;\subset\; \mathcal{H}_0 \;\subset\; \mathcal{H}_{-1} \;\subset\; \mathcal{H}_{-2} \;\subset\; \cdots$$

であることに注意する．テスト関数の集合 $\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}$ 上の超関数の集合 $\mathcal{S}'$ をそれぞれ次で定義する:

$$\mathcal{S} \;=\; \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_k \,, \quad \mathcal{S}' \;=\; \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_{-k} \,.$$

$t \in [0,T]$ に対して, 密度揺動場 $\mathcal{Y}_t^N \in \mathcal{S}'$ を,

$$\mathcal{Y}_t^N(G) \;=\; N^{-d/2} \sum_{x\in\mathbb{T}_N^d} G(x/N) \left\{ \eta_t^N(x) - \mathbb{E}_{\nu^N_{\rho_0(\cdot)}} \left[\eta_t^N(x) \right] \right\} \,, \quad G \in \mathcal{S} \,,$$

により定義する．$\mathcal{Y}^N$ は $D([0,T], \mathcal{S}')$ に値をとる確率変数になっていることに注意する．

$\{\mathcal{Y}^N\}_{N\in\mathbb{N}}$ の $N \to \infty$ における収束を述べるために, 極限に現れる無限次元 Ornstein-Uhlenbeck 過程について述べておこう．再び $\rho : [0,T] \times \mathbb{T}^d \to [0,1]$ を熱方程式 (9) の解とする．ただし初期値 ρ_0 は滑らかと仮定しておく．また $\chi(\alpha) = \alpha(1-\alpha), \alpha \in [0,1]$ として, $\chi_t(\cdot) = \chi(\rho_t(\cdot))$ とおく.[29] $\mathcal{Y}_t$ を次の確率偏微分方程式の解とする:

$$d\mathcal{Y}_t \;=\; \Delta \mathcal{Y}_t dt + \nabla \left[\sqrt{2\chi_t} d\mathcal{B}_t \right] \,, \tag{12}$$

ただし, $\mathcal{B}_t$ は時空についての white noise である．これらの記法の下, Ravishanker [40] により次が示された.[30]

Theorem 4.3 $\{\mathcal{Y}^N\}_{N\in\mathbb{N}}$ は $D([0,T], \mathcal{S}')$ 値の確率変数列として $N \to \infty$ において, 確率偏微分方程式 (12) の解に弱収束する．

[29] χ は静的圧縮率とよばれ, 様々なスケール極限において現れる (小節 4.3, 5.2 でも現れる). 排他過程の場合には単に平均 α の Bernoulli 確率変数の分散である．

[30] Ravishankar [40] は $\mathcal{S}'$ 値確率過程を扱っているが, $\mathcal{H}_{-k}$ 値確率過程 (ただし $k > 2 + d/2$) としても Theorem 4.3 は成立するかもしれない. 少なくとも $d = 1$ のときは成立する．

揺動に関する問題は流体力学極限に比べると未解決になっているところが多い. 対称排他過程の場合には流体力学方程式が線形なので, 非平衡揺動を示すことが可能であるが, 一般には非平衡揺動の問題は未解決である. 極限の流体力学方程式が非線形になる場合でも, De Masi, Ferrari, Lebowitz [10] において非平衡揺動が得られているが, 手法は模型特有の議論を行なっており, 他の模型には基本的に適用できない. 広範な汎用性を持つ手法としては, 平衡揺動であれば勾配系に対しては Brox, Rost [7], 非勾配系に対しては Lu [38] による結果がある. 一方, 非平衡揺動は空間次元が 1 かつ勾配系の場合に Chang, Yau [9] により解決されている. Jara, Menezes[28] は相対エントロピーの評価 (11) を用いて, 弱非対称単純排他過程に対して非平衡揺動を $d \leq 3$ の場合に示した. 一方, 非勾配系に対する非平衡揺動の問題は依然として未解決である.

Kipnis-Varadhan 不等式の有用性についても再度触れておこう. 勾配系の平衡揺動の問題を例に述べると, 証明では $\mathcal{Y}^N$ の極限におけるマルチンゲール問題を解くために, 密度揺動場に対する Dynkin マルチンゲール (5) を計算する. その際計算に現れる加法的汎関数は密度揺動場の関数にならず, そのままではマルチンゲール問題を解くことができない. この問題を解消するために Boltzman-Gibbs 原理とよばれる揺動散逸関係を示す必要がある. そのためには時空平均に対する量についての評価が必要になるが, そこで Kipnis-Varadhan 不等式を援用するのである. Kipnis-Varadhan 不等式を援用すると, H_{-1} ノルムについての評価が必要になるが, 典型的には第二最小固有値に対する評価を用いて L^2 ノルムの評価に帰着させるのである. このような一連の評価は実際には模型毎に行う必要があるが, 非常に汎用性のある手法であり, 揺動の問題において本質的であると思われる. 例えば後述の Gonçalves, Jara [17] においても, これらの手法が用いられている.

最後に KPZ 方程式の話題について述べたい. Kardar, Parisi, Zhang [31] は揺らぎをもった界面の時間発展方程式として KPZ 方程式を導入した.[31] KPZ 方程式は物理学者により非常に普遍的な対象であると考えられており, その普遍性を巡って様々な方面から活発に研究が行われている.[32] ここでは本稿で述べた結果の手法に関連するもののみについて述べたい. Bertini, Giacomin [4] により, 弱非対称排他過程の高さ関数が, KPZ 方程式の Cole-Hopf 解に収束することが示された.[33] 近年 Gonçalves, Jara [17] により勾配型の排他的な粒子系に対して KPZ 方程式の普遍性が研究された. 彼らの研究ではエネルギー解という概念が導入され, その解の範疇で議論が行われていたが, 当時は解の一意性は示されていなかった. エネルギー解の一意性は後に Gubinelli, Perkowski [20] により示された. また Gonçalves, Jara [17] は Gonçalves, Jara, Sethuraman [19] においてより広いクラスの粒子系へと拡張された. また連続スピンの模型に対しては Diehl, Gubinelli, Perkowski [12], 長距離離ジャンプを許す粒子系に対しては Gonçalves, Jara [18] などの研究がある.[34] 最後に, KPZ 方程式に関する普遍性には弱い意味のものと強い意味のものがあるが, これらの研究は全て弱い意味のものであることに注意する.[35] この方面からの研究としては, 強い意味での KPZ 方程式の普遍性は未解決である.

[31] 勿論彼らが研究したためにこの名前がついているのである.

[32] 例えばよく知られているように, 2014 年の Fields 賞受賞の一人である Hairer 氏の受賞理由の一つは, KPZ 方程式に関連している.

[33] 高さ関数については紹介しないが, 雑にいえば高さ関数の微分が密度揺動場である.

[34] これらの研究は KPZ 方程式ではなく, 実際には確率 Burgers 方程式を扱っている.

[35] 弱い・強いと言及されるが, 数学的な結果として弱い・強いという意味ではない.

4.3. 経験分布に対する大偏差原理

本節最後の小節では流体力学極限に対する大偏差原理について述べる. 一言で結果を述べると, 確率測度の列 $\{Q^N\}_{N\in\mathbb{N}}$ に対して Donsker-Varadhan 型の大偏差原理が成立する, ということである. この事実のみでなく, 後述の Macroscopic Fluctuation Theory においてレート関数が重要な役割を果たすため, 以下レート関数を正確に定義しよう.

以下では初期分布に関する関数 ρ_0 は 0 と 1 から真に離れていることを仮定する. つまり, ある $0 < c \le C < 1$ に対して, $c \le \rho_0(u) \le C$ が全ての $u \in \mathbb{T}^d$ に対して成立しているものとする. $\mathcal{M}_+^o$ により $\pi \in \mathcal{M}_+$ であって, Lebesgue 測度に絶対連続かつその密度がほとんどいたるところ 1 以下となるもの全体とする:

$$\mathcal{M}_+^o \;=\; \{\pi \in \mathcal{M}_+ : \pi(du) = \rho(u)du,\; 0 \le \rho(u) \le 1,\; \text{a.e.}\ \} \,.$$

レート関数は初期分布に対するレート関数と, 動的なレート関数に対する和で与えられる. 初めに初期分布に対するレート関数を定義しよう. $\omega \in \mathcal{M}_+$ を固定する. $\mathbb{T}^d$ 上の連続関数 $\gamma : \mathbb{T}^d \to (0,1)$ に対して

$$h_\gamma(\omega) \;=\; \int_{\mathbb{T}^d} \log\left[\frac{\gamma(u)(1-\rho_0(u))}{(1-\gamma(u))\rho_0(u)}\right]\omega(du) + \int_{\mathbb{T}^d} \log\left[\frac{1-\gamma(u)}{1-\rho_0(u)}\right] du \,,$$

により定義する. 更に $I_{ini} : \mathcal{M}_+ \to [0,\infty]$ を,

$$I_{ini}(\omega) \;=\; \sup_\gamma h_\gamma(\omega) \,,$$

により定義する. ただし, sup は $\mathbb{T}^d$ 上の連続関数 $\gamma : \mathbb{T}^d \to (0,1)$ 全てに渡る.

次に動的なレート関数を定義しよう. $\pi(t,du) = \rho(t,u)du \in D([0,T], \mathcal{M}_+^o)$ を固定する.[36] $G \in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{T}^d)$ に対して,

$$\begin{aligned} J_G(\pi) \;=\; &\int_{\mathbb{T}^d} G(T,u)\,\pi(T,du) - \int_{\mathbb{T}^d} G(0,u)\,\pi(0,du) \\ &- \int_0^T dt \int_{\mathbb{T}^d} (\partial_t + \Delta)G(t,u)\,\pi(t,du) - \int_0^T dt \int_{\mathbb{T}^d} \chi(\rho(t,u))\|(\nabla G)(t,u)\|^2\,du \,, \end{aligned}$$

により定義する. 更に, $I_{dyn} : D([0,T],\mathcal{M}_+) \to [0,\infty]$ を,

$$I_{dyn}(\pi) \;=\; \begin{cases} \sup_G J_G(\pi)\,, & \text{if } \pi \in D([0,T],\mathcal{M}_+^o)\,, \\ \infty\,, & \text{otherwise}\,, \end{cases}$$

により定義する. ただし, sup は $C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{T}^d)$ に属す関数全てに渡る. 詳しく述べないが, $I_{dyn}(\pi) < \infty$ なる $\pi(t,du) = \rho(t,u)du$ に対して, 適当な重み付き H_{-1} ノルム $\|\cdot\|_{-1,\chi(\rho)}$ を導入することにより, 動的なレート関数 $I_{dyn}(\pi)$ は次のようにかけることが知られている:

$$I_{dyn}(\pi) \;=\; \int_0^T \|\partial_t\rho_t - \Delta\rho_t\|_{-1,\chi(\rho)}\; dt \,. \tag{13}$$

[36] 記号の乱用ではあるが, ここでは ρ は熱方程式の解ではなく, 一般の関数 $\rho : [0,T]\times\mathbb{T}^d \to [0,1]$ である.

最後に, $I : D([0,T],\mathcal{M}_+) \to [0,\infty]$ を,

$$I(\pi) \ = \ I_{ini}(\pi_0) + I_{dyn}(\pi) \ , \tag{14}$$

により定義する. Kipnis, Olla, Varadhan [32] は確率測度の列 $\{Q^N\}_{N\in\mathbb{N}}$ に対して I をレート関数とする大偏差原理を示した.

Theorem 4.4 $D([0,T],\mathcal{M}_+)$ 上の確率測度の列 $\{Q^N\}_{N\in\mathbb{N}}$ はレート関数を I, スピードを N^d として大偏差原理を満たす, つまり, 任意の閉集合 $\mathcal{K} \subset D([0,T],\mathcal{M}_+)$ に対して

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N^d} \log Q^N(\mathcal{K}) \ \le \ -\inf_{\pi\in\mathcal{K}} I(\pi) \ ,$$

が成立し, 任意の開集合 $\mathcal{O} \subset D([0,T],\mathcal{M}_+)$ に対して

$$\underline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N^d} \log Q^N(\mathcal{O}) \ \ge \ -\inf_{\pi\in\mathcal{O}} I(\pi) \ ,$$

が成立する.

Theorem 4.4 に関連する近年の話題として, Macroscopic Fluctuation Theory(以下 MFT) について述べたい. MFT は Bertini, De Sole, Gabrielli, Jona-Lasinio, Landim による, 非平衡熱力学を統計力学の立場から研究する数学及び物理学の理論である. 詳細については彼らによる概説 [3] 及び概説中の参考文献を参照して頂きたい.

MFT においては, (13) の被積分関数は無限次元のラグランジアンに対応し, 定常状態に対する大偏差原理のレート関数は, 対応するラグランジアンから Freidlin-Wentzell の意味での準ポテンシャルを計算することで与えられる. 本稿では周期境界領域を扱ったので定常状態に対する大偏差原理を示すことは難しくないが, これらのアイデアは外部と粒子の移流・流入がある場合についても同様に成立する. 外部と粒子の移流・流入がある場合や, 外力がある場合には, 粒子系の定常状態は流れをもつ. 流れを持つ定常状態は非平衡定常状態とよばれ, 一般に解析することは困難である.[37] MFT による解析の結果として, 非平衡定常状態に対しても Clausius の不等式のような古典的な結果が得られる. 参考文献をあげるのみになってしまうが, MFT に関する数学的に厳密な結果の幾つかとして, [2, 5, 6, 37, 13] などをあげておく.

5. 占有時間及び着目粒子に対するスケール極限

本節では占有時間及び着目粒子に対するスケール極限について述べる. また本節では再び全空間 $\mathbb{Z}^d$ 上で排他過程を考えることとする.

5.1. 占有時間に対するスケール極限

記号を幾つか復習しよう. $\{\eta_t : t \ge 0\}$ は $X = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ 上の Markov 過程であって, その生成作用素は

$$Lf(\eta) \ = \ \sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\sum_{z\in\mathbb{Z}^d} p(z)\eta(x)[1-\eta(x+z)][f(\eta^{x,x+z}) - f(\eta)] \ , \quad f \in \mathcal{C} \ , \tag{15}$$

---

[37] 非常に単純な模型の場合でも, 非平衡定常状態は長距離相関をもつ. また非平衡定常状態は基本的に具体系を得られない.

で与えられるものであった. また原点における占有時間は,

$$\int_0^t \eta_s(0)ds \ , \tag{16}$$

により定義されていた. また本小節では平衡系のみを扱うので, 再び粒子数密度を $\alpha \in [0,1]$ に固定する.

節 3 では Kipnis-Varadhan 理論(加法的汎関数に対する中心極限定理)について述べた. p が対称であれば占有時間に対する中心極限定理は Theorem 3.1 の典型的な応用例である. 実際, $V(\eta) = \eta(0) - \alpha$ は $d \geq 3$ であれば $V \in H_{-1}$ となるので, 占有時間(16)に対して中心極限定理が得られる. しかしながら p が対称であっても, $d = 1, 2$ のときには $V \notin H_{-1}$ となるので, Theorem 3.1 からは中心極限定理は得られない. しかし $d = 1, 2$ の場合には Kipnis [29] が占有時間(16) に対して中心極限定理を示している. p が対称でない場合を含めて, 平衡系の中心極限定理に関連する研究については, Komorowski, Landim, Olla [34, Chapter 5] を参照して頂きたい. 一方非平衡系における占有時間に対する中心極限定理は多くのことが未解決と思われる.[38] [39]

次に占有時間 (16) に対する大偏差原理について述べたい. エルゴード定理により $t \to \infty$ において,

$$\frac{1}{t}\int_0^t \eta_s(0)ds \ \to \ \alpha \ , \quad \text{a.s. and in } L^1 \ ,$$

が成立したことを思い出そう. この大数の法則に対応する大偏差原理は, 次の定理で述べられる.

Theorem 5.1 $t > 0$ に対して,

$$a_t \ = \ \begin{cases} \sqrt{t} \ , & d = 1 \ , \\ t/\log t \ , & d = 2 \ , \\ t \ , & d \geq 3 \ , \end{cases}$$

とする. 確率変数の列 $\{t^{-1}\int_0^t \eta_s(0)ds\}_{t>0}$ は, 空間次元 d に依存するある関数 $\psi_d : [0,1] \to [0,\infty)$ をレート関数, スピードを a_t として大偏差原理を満たす. つまり, 任意の閉集合 $F \subset [0,1]$ に対して

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{a_t} \log \mathbb{P}_{\nu_\alpha}\left(\frac{1}{t}\int_0^t \eta_s(0)ds \in F\right) \ \leq \ -\inf_{\beta\in F} \psi_d(\beta) \ ,$$

が成立し, 任意の開集合 $U \subset [0,1]$ に対して

$$\underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{a_t} \log \mathbb{P}_{\nu_\alpha}\left(\frac{1}{t}\int_0^t \eta_s(0)ds \in U\right) \ \geq \ -\inf_{\beta\in U} \psi_d(\beta) \ ,$$

が成立する.

---

[38] 非常に限定的なクラスの V に対しては示すことが可能であると思う.

[39] 可積分系としての計算による結果はあるかもしれないが, ここでは含めていない. 着目粒子に対する結果についても同様である.

この定理はLandim [35]により$d=1$及び$d\geq 3$の場合に初めに示され, $d=2$の場合はChang-Landim-Lee [8, 36]により示された. レート関数ψ_dの定義についてはこれらの文献を参照して頂きたい. 興味深いことに, $d=2$の場合には具体的な式として書き下すことが可能である.

以下レート関数及びスピードの空間次元依存性について述べたい.[40] 初めに占有時間を考える代わりに, (16)の被積分関数が$\mathbb{R}$上の連続時間ランダムウォークである場合について考えたい. このとき対応する積分はIID和の連続版と考えることができるので, スピードはその和の大きさのtである. $d\geq 3$の場合にはスピードがtであるため, 状況としては同じことが起きているのではないかと推測される. 実際, 3次元以上のランダムウォークは推移的であるため, 一定時間後には原点から永久的に離れる. そのため各粒子は占有時間に寄与を与えたとしても, いずれは寄与を与えなくなると考えられる. これが$\mathbb{Z}^d$上の無限個の粒子から独立に寄与されると考えれば, スピードがtであることは不自然でないように思われる. このような事情もあり, $d\geq 3$の場合のTheorem 5.1の証明はあまり複雑ではない.

一方$d=1,2$の場合は物事が一変し, スピードがランダムウォークのものとは異なる. $d=1$の場合にスピードが$\sqrt{t}$であることは, 拡散スケールの時間発展から大偏差事象が決まることと関係している. この理由から$d=1$の場合は流体力学極限に対する大偏差原理を用いて縮約原理を適用するのである. このことを$d\geq 3$の場合と比べると, 大偏差事象の起こり方が根本的に違うこともわかる. $d=2$の場合も$d=1$の場合と状況が本質的に異なり, $d=1$では拡散スケールにおける大偏差事象が寄与することに対して, $d=2$では更に小さい領域である劣拡散領域における振る舞いを捉える必要がある.

粒子系に対する占有時間のこのような振る舞いは, 一般的に起こる“異常な”振る舞いとしてShiraishi [41]によって物理的な計算により示されている. しかしながら数学的に大偏差原理として示されている結果は, 筆者の知る限り非常に限られている. そのため, $1,2$次元における占有時間に対する大偏差原理は未解決のように思われる.

5.2. 着目粒子に対するスケール極限

最後の話題として着目粒子の問題について述べたい.[41] 節4で扱った問題は粒子系から決まる(粒子数密度などの)巨視的な量がどのように振る舞うかを問題にしていたのであるが, ここでは無限個ある粒子の中の一つの粒子がどのように振る舞うかを問題にする.[42] この問題で重要な役割を果たすのが, Kipnis, Varadhan [33]により導入された, 着目粒子からみた排他過程である.[43]

初期時刻では原点に粒子があると仮定して, $t\geq 0$に対して原点を出発する粒子の時刻tにおける位置を$Z_t\in\mathbb{Z}^d$とかくことにする.[44] [45] $\{\tau_z\}_{z\in\mathbb{Z}^d}$を$X$に作用する平行移動とする: $(\tau_z\eta)(x)=\eta(x+z)$. このとき, 配置$\xi_t$を$\xi_t=\tau_{Z_t}\eta_t$により定義する. Z_tには粒子があるため(常に着目粒子がいるため), $\xi_t(0)=\eta_t(Z_t)=1$である. この理由から, $\mathbb{Z}^d_*=\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}$として, ξ_tは$X_*=\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d_*}$の元であると今後は考える. X_*の元はξでか

---

[40] レート関数は粒子数密度αにも依存する.

[41] 英語ではtagged particle problemである.

[42] 前者は塊状拡散, 後者は自己拡散とよばれる.

[43] 他の模型を含めて一般的にはenvironment seen from particleとよばれる.

[44] 正確には時刻0で原点に粒子がいるように条件付けをする必要がある.

[45] 排他過程をstirring dynamicsとみてしまうと, Z_tは連続時間ランダムウォークに他ならないので, ここでは排他ルールの下での軌跡としている.

くことにして, $\mathcal{C}_*$ を X_* 上の局所関数全体とする.

$\{\xi_t : t \geq 0\}$ は X_* 上の Markov 過程であり, その生成作用素は $f \in \mathcal{C}_*$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}f &= \mathcal{L}_{env}f + \mathcal{L}_{tp}f \ , \\
\mathcal{L}_{env}f(\xi) &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^d_*} \sum_{y \in \mathbb{Z}^d_*} p(y-x)\xi(x)[1-\xi(y)[f(\xi^{x,y}) - f(x)] \ , \\
\mathcal{L}_{tp}f(\xi) &= \sum_{z \in \mathbb{Z}^d_*} p(z)[1-\xi(z)][f(\theta_z \xi) - f(\xi)] \ ,
\end{aligned}$$

となることがわかる. ただし, $z \in \mathbb{Z}^d_*, \xi \in X_*$ に対して $\theta_z \xi$ は次で与えられる:

$$(\theta_z \xi)(x) = \begin{cases} \xi(z) \ , & x = -z \ , \\ \xi(x+z) \ , & x \neq -z \ . \end{cases}$$

$\mathcal{L}_{env}$ は着目粒子以外の粒子のジャンプに対応し, $\mathcal{L}_{tp}$ は着目粒子のジャンプに対応する. ξ_t を導入する利点は, 後にみるように ξ_t を解析することで Z_t が復元可能なことにある.

初めに平衡系の場合について考えよう. ξ_t の平衡状態は η_t の場合と同様に直積 Bernoulli 測度で与えられる. ν^*_α を平均 α の X_* 上の直積 Bernoulli 測度とする:

$$\nu^*_\alpha(\eta : \eta(x) = 1) = \alpha \ , \quad x \in \mathbb{Z}^d_* \ .$$

ν^*_α は $\{\xi_t : t \geq 0\}$ に対する不変確率測度であるが, 一般にはエルゴード的にはならない. 命題の形にまとめると次で与えられる.[46]

Proposition 5.2 $d \geq 2$ または $d = 1$ かつ $\sum_{z \neq \pm 1} p(z) > 0$ を仮定する. このとき, 任意の $0 \leq \alpha \leq 1$ に対して ν^*_α は $\mathcal{L}$ に対してエルゴード的である.

1次元かつ最近接ジャンプしか許されない場合には, 着目粒子を超えて他の粒子がジャンプすることができないため, ν^*_α は $\mathcal{L}$ に対してエルゴード的でないのである. 占有時間の場合にはこのような状況は起こらなかったが, 着目粒子の場合にはこのことが影響してスケール極限も異なってくる. これについては後述する.

少しの間 Proposition 5.2 の仮定が満たされる場合に注目しよう. 先に述べたように着目粒子の位置 Z_t は, 着目粒子から見た排他過程 ξ_t を解析することで復元できる. 以下それをみていこう. $p(z) > 0$ なる $z \in \mathbb{Z}^d_*$ と $t \geq 0$ に対して, N^z_t を $[0,t]$ の間に起こった ξ_s から $\theta_z \xi_s$ へのジャンプの総数とする. このとき, N^z_t の定義から明らかに

$$Z_t = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d_*} z N^z_t \ , \tag{17}$$

となる. また,

$$M^z_t = N^z_t - \int_0^t p(z)[1-\xi_s(y)]ds \ , \tag{18}$$

とおくと, $\{M^z_t : p(z) > 0\}$ は直交するマルチンゲールである. よって

$$m = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d_*} zp(z) \ , \quad V_*(\xi) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d_*} zp(z)[\alpha - \xi(z)] \ ,$$

[46] η_t のときと同じように, 仮定 (A3) は次の命題のために必要である.

とおき, N_t^z の平均が $p(z)[1-\alpha]t$ であることに注意すれば, (17) と (18) より次を得る:

$$Z_t - (1-\alpha)tm \;=\; \sum_{z\in\mathbb{Z}_*^d} zM_t^z + \int_0^t V_*(\xi_s)ds\;. \tag{19}$$

(19) の右辺の第一項は各成分がマルチンゲールであるベクトルであり, 第二項は各成分が平均 0 の局所関数による加法的汎関数となっている. よって節 3 で述べたようなマルチンゲールの分解 (Kipnis-Varadhan 理論による分解) を第二項に行うことで, Z_t に対する中心極限定理は, マルチンゲール中心極限定理から得ることが可能になるのである. 極限の拡散係数の非退化性など, 詳細については Komorowski, Landim, Olla [34, Chapter 6] を参照して頂きたい.

次に Proposition 5.2 の仮定が満たされない場合についてみていこう. つまり, $d=1$ であり $p(1)+p(-1)=1$ となる場合である. p が対称である場合, $p(1)=p(-1)=1/2$ のときには平衡状態のみならず非平衡状態に対するスケール極限も知られている. よってこれ以降は非平衡系を考える.

先に注意したように, 対称排他過程の場合には全空間の場合にも流体力学極限が成立する. よって流体力学方程式は小節 4.1 と同様に $\mathbb{R}$ 上の熱方程式 (9) になる. すこし記号の乱用になるが, $\rho:[0,\infty)\times\mathbb{R}\to[0,1]$ を $\mathbb{R}$ 上の熱方程式の解で, 初期値が ρ_0 であるものとしよう. 非平衡系では初期分布 $\nu^N_{\rho_0(\cdot)}$ がスケールパラメター N に依存するため, η_t, Z_t などは η_t^N, Z_t^N とかいたほうがよいが, 記号の簡単化のため N を省略する. このとき, Jara, Landim [23] により, $d=1$ かつ $p(1)=p(-1)=1/2$ の場合に, Z_t に対する大数の法則と中心極限定理が示された.

Theorem 5.3 $\rho_0:\mathbb{R}\to[0,1]$ は 4 階までの微分が全て有界であるものとする. このとき, 任意の $t\geq 0$ に対して, Z_{tN^2}/N は

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u_t \;=\; -\dfrac{(\partial_u\rho)(t,u_t)}{\rho(t,u_t)}\;, \\ u_0 \;=\; 0\;. \end{cases}$$

の解 u_t に $N\to\infty$ において確率収束する.

注目すべき点は, 着目粒子に対する時間スケールが N^2 であることに比べ, 空間スケールが N となっている点である. これは着目粒子から見た排他過程がエルゴード性を持たないことに起因する. 実際, $u\geq 0$ として事象 $\{Z_{tN^2}\geq Nu\}$ が起こるためには, 初期時刻で区間 $[0,Nu]$ にいる全ての粒子が時刻 tN^2 において Nu を超えなければならない. このことは時間スケールが N では起こらず N^2 になって初めて起こるのである.

Theorem 5.4 $\rho_0:\mathbb{R}\to[0,1]$ は 4 階までの微分が全て有界であるものとする. $t\geq 0$ に対して $W_t^N = N^{-1/2}(Z_{tN^2}-Nu_t)$ とおく. このとき, 任意の $k\in\mathbb{N}$ と任意の $0\leq t_1<\cdots<t_k$ に対して, $(W^N_{t_1},\ldots,W^N_{t_k})$ は次の共分散を持つ Gauss ベクトル $(W_{t_1},\ldots,W_{t_k})$

に分布収束する:

$$\begin{aligned}\rho(s,u_s)\rho(t,u_t)E[W_sW_t] \;=\; & \int_{-\infty}^{0} dx\ P_{u_s}[B_s \le x]\ P_{u_t}[B_t \le x]\ \chi_0(x) \\ & + \int_0^{\infty} dx\ P_{u_s}[B_s \ge x]\ P_{u_t}[B_t \ge x]\ \chi_0(x) \\ & + \ 2\int_0^s dr \int_{-\infty}^{\infty} ds\ p_{t-r}(u_t,x)\ p_{s-r}(u_s,x)\ \chi_t(x)\ .\end{aligned}$$

ただし, 上の式において P_u は $u \in \mathbb{R}$ を出発する $\mathbb{R}$ 上のブラウン運動に対する確率, $p_t(x,y)$ は $\mathbb{R}$ 上の熱核である.

証明において基本的な性質について述べよう. それは着目粒子の位置が経験分布とカレントにより特徴付けられるということである. $t \ge 0$ に対して, 時刻 $[0,t]$ の間に -1 から 0 へとジャンプした粒子の総数引く時刻 $[0,t]$ の間に 0 から -1 へとジャンプした粒子の総数は, $(-1,0)$ 上のカレントとよばれる.[47] $(-1,0)$ 上のカレントを $J_{-1,0}(t)$ でかくこととしよう. このとき, 任意の $x \in \mathbb{N}$ と $t \ge 0$ に対して,

$$\{Z_t \ge x\} \;=\; \{J_{-1,0}(t) \ge \sum_{y=0}^{x-1} \eta_t(y)\}\ , \tag{20}$$

が成立する.[48] (20) の成立は容易にわかるが, 感覚としては, Z_t が x を超えるためには負側にいる粒子に押される必要があるということである. (20) より $\{Z_t \ge x\}$ は経験分布とカレントにより特徴付けられるのである. またカレント $J_{-1,0}(t)$ は形式的には次のようにかかれることもわかる:

$$J_{-1,0}(t) \;=\; \sum_{x \ge 0} [\eta_t(x) - \eta_0(x)]\ . \tag{21}$$

この式は形式的であるが, カレントが経験分布により計算されることが理解されるであろう. (20) と (21) 及び流体力学極限を用いれば, Z_{tN^2}/N が満たす極限の方程式 (の積分形) も形式的には得られる.

Theorem 5.4 は, Jara と Landim により一気に解決されたわけでなく, 最初は平衡系の場合に研究されてきた. 平衡系の場合には更に詳しく解析されており, 例えば Peligrad, Sethuraman [39] により $\{W_t^N : t \ge 0\}$ に対する緊密性が示され, 極限がハースト指数 $1/4$ の分数ブラウン運動であることが示されている. 関連する研究については, Komorowski, Landim, Olla [34, Chapter 6] を参照して頂きたい.

Theorem 5.3 に対する大偏差原理は Sethuraman, Varadhan [43] により示された. やはり証明において基本的な性質は, Z_t が経験分布とカレントによって特徴付けられるということである. 経験分布に対する大偏差原理を $\mathbb{Z}$ 上の場合に示し, 縮約原理を用いることで Theorem 5.3 に対する大偏差原理は示されている. このような証明のため, Z_{tN^2}/N に対する大偏差原理のレート関数は, ($\mathbb{Z}$ 上の場合に定義される) 経験分布に対する大偏差原理のレート関数 (14) を用いた変分問題の値として定義される. そのためレート関数の具体形は不明であった. 近年, Imamura, Mallick, Sasamoto [22] によ

[47] もしくは積分したカレントとよばれる.

[48] この事実は $d = 1$ かつ $p(1) + p(-1) = 1$ だから成立しており, 一般的な場合には成立しない.

り, 初期分布がtwo-sided Bernoulliの場合に大偏差原理のレート関数の具体系が求められた. 両者の手法は大きく異なり, 前者は解析的であることに比べ, 後者はカレントに対する厳密計算を行っている.

他に関連する話題として, Jara, Landim, Sethuraman [24, 25] では1次元零距離過程の着目粒子に対して非平衡中心極限定理を示している. 零距離過程の着目粒子の場合には, 着目粒子からみた零距離過程を導入すると, $\sum_z zp(z) = 0$ であれば(19) において加法的汎関数が消えて, Z_t がマルチンゲールになるという特殊な状況になる. 彼らはこの性質を用いて零距離過程の着目粒子に対して非平衡中心極限定理を示している. 多次元への拡張は成立するかどうかも含めて不明である. また着目粒子ではないが, 排他過程をランダムな環境として, その中を運動するランダムウォークに対する大偏差原理がAvena, Jara, Völlering [1] により示されている. 問題の構造は非常に似ているが, 着目粒子は環境との相互作用があるという点で, 彼らの模型の方が単純な構造になっている.[49]

謝辞

桑江一洋氏に講演の機会を与えていただいたこと, 中島秀太氏に初期の段階の原稿を読み貴重な意見を与えていただいたこと, それぞれ感謝いたします. また舟木直久氏に, 修士課程から現在にいたるまで研究のみならず非常に多くのことをご指導して頂いたこと, 心より感謝いたします. 最後に, これまで数学を通じて出会いお世話になった方皆様に感謝いたします.

参考文献

[1] Avena, L., Jara, M., Völlering, F.: Explicit LDP for a slowed RW driven by a symmetric exclusion process. Probab. Theory Related Fields **171**, 865–915 (2018)

[2] Bertini, L., De Sole, A., Gabrielli, D., Jona-Lasinio, G., Landim, C.: Large deviations for the boundary driven symmetric simple exclusion process. Math. Phys. Anal. Geom. **6**, 231–267 (2003)

[3] Bertini, L., De Sole, A., Gabrielli, D., Jona-Lasinio, G., Landim, C.: Macroscopic fluctuation theory. Rev. Mod. Phys. **87**, 593–636 (2015)

[4] Bertini, L., Giacomin, G.: Stochastic Burgers and KPZ equations from particle systems. Comm. Math. Phys. **183**, 571–607 (1997)

[5] Bodineau, T., Giacomin, G.: From dynamic to static large deviations in boundary driven exclusion particle systems. Stochastic Process. Appl. **110**, 67–81 (2004)

[6] Bodineau, T., Lagouge, M.: Large deviations of the empirical currents for a boundary-driven reaction diffusion model. Ann. Appl. Probab. **22**, 2282–2319 (2012)

[7] Brox, T., Rost, H.: Equilibrium fluctuations of stochastic particle systems: the role of conserved quantities. Ann. Probab. **12**, 742–759 (1984)

[8] Chang, C.-C., Landim, C., Lee, T.-Y.: Occupation time large deviations of two-dimensional symmetric simple exclusion process. Ann. Probab. **32**, 661–691 (2004)

[9] Chang, C.-C., Yau, H.-T.: Fluctuations of one-dimensional Ginzburg-Landau models in nonequilibrium. Comm. Math. Phys. **145**, 209–234 (1992)

[10] De Masi, A., Ferrari, P. A., Lebowitz, J. L.: Reaction-diffusion equations for interacting particle systems. J. Statist. Phys. **44**, 589–644 (1986)

[49] 彼らの模型では, ランダムウォークは環境(排他過程)に影響を与えない.

[11] De Masi, A., Funaki, T., Presutti, E., Vares, M. E.: Fast-reaction limit for Glauber-Kawasaki dynamics with two components. arXiv:1903.09172.

[12] Diehl, J., Gubinelli, M., Perkowski, N.: The Kardar-Parisi-Zhang equation as scaling limit of weakly asymmetric interacting Brownian motions. Comm. Math. Phys. **354**, 549–589 (2017)

[13] Farfán, J., Landim, C., Tsunoda, K.: Static large deviations for a reaction-diffusion model. Probab. Theory Related Fields **174**, 49–101 (2019)

[14] Funaki, T., Tsunoda, K.: Motion by mean curvature from Glauber-Kawasaki dynamics. arXiv:1812.10182.

[15] 舟木直久, 内山耕平: ミクロからマクロへ 1 界面モデルの数理. 丸善出版, (2002)

[16] 舟木直久, 内山耕平: ミクロからマクロへ 2 格子気体の流体力学極限. 丸善出版, (2002)

[17] Gonçalves, P., Jara, M.: Nonlinear fluctuations of weakly asymmetric interacting particle systems. Arch. Ration. Mech. Anal. **212**, 597–644 (2014)

[18] Gonçalves, P., Jara, M.: Density fluctuations for exclusion processes with long jumps. Probab. Theory Related Fields **170**, 311–362 (2018)

[19] Gonçalves, P., Jara, M., Sethuraman, S.: A stochastic Burgers equation from a class of microscopic interactions. Ann. Probab. **43**, 286–338 (2015)

[20] Gubinelli, M., Perkowski, N.: Energy solutions of KPZ are unique. J. Amer. Math. Soc. **31**, 427–471 (2018)

[21] Guo, M. Z., Papanicolaou, G. C., Varadhan, S. R. S.: Nonlinear diffusion limit for a system with nearest neighbor interactions. Comm. Math. Phys. **118**, 31–59 (1988)

[22] Imamura, T., Mallick, K., Sasamoto, T.: Large deviation of a tracer in the symmetric exclusion process. Phys. Rev. Lett. **118**, 160601 (2017)

[23] Jara, M., Landim, C.: Nonequilibrium central limit theorem for a tagged particle in symmetric simple exclusion. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **42**, 567–577 (2006)

[24] Jara, M., Landim, C., Sethuraman, S.: Nonequilibrium fluctuations for a tagged particle in mean-zero one-dimensional zero-range processes. Probab. Theory Related Fields **145**, 565–590 (2009)

[25] Jara, M., Landim, C., Sethuraman, S.: Nonequilibrium fluctuations for a tagged particle in one-dimensional sublinear zero-range processes. Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **49**, 611-637 (2013)

[26] Jara, M., Landim, C. Tsunoda, K.: Derivation of viscous Burgers equations from weakly asymmetric exclusion processes. arXiv:1902.08016.

[27] Jara, M., Menezes, O.: Non-equilibrium fluctuations for a reaction-diffusion model via relative entropy. arXiv:1810.03418.

[28] Jara, M., Menezes, O.: Non-equilibrium fluctuations of interacting particle systems. arXiv:1810.09526.

[29] Kipnis, C.: Fluctuations des temps d'occupation d'un site dans l'exclusion simple symétrique. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **23**, 21–35 (1987)

[30] Kipnis, C., Landim, C.: Scaling Limits of Interacting Particle Systems. Springer, NewYork (1999)

[31] Kardar, M., Parisi, G., Zhang, Y.-C.: Dynamical scaling of growing interfaces. Phys. Rev. Lett. **56**, 889–892 (1986)

[32] Kipnis, C., Olla, S., Varadhan, S. R. S.: Hydrodynamics and large deviation for simple exclusion processes. Comm. Pure Appl. Math. **42**, 115–137 (1989)

[33] Kipnis, C., Varadhan, S. R. S.: Central limit theorem for additive functionals of

reversible Markov processes and applications to simple exclusions. Comm. Math. Phys. **104**, 1–19 (1986)

[34] Komorowski, T., Landim, C., Olla, S.: Fluctuations in Markov Processes. Springer, Heidelberg (2012)

[35] Landim, C.: Occupation time large deviations for the symmetric simple exclusion process. Ann. Probab. **20**, 206–231 (1992)

[36] Landim, C., Chang, C.-C., Lee, T.-Y.: A large deviations principle for the polar empirical measure in the two-dimensional symmetric simple exclusion process. arXiv:1704.00971.

[37] Landim, C., Tsunoda, K.: Hydrostatics and dynamical large deviations for a reaction-diffusion model. Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **54**, 51–74 (2018)

[38] Lu, S. L.: Equilibrium fluctuations of a one-dimensional nongradient Ginzburg-Landau model. Ann. Probab. **22**, 1252–1272 (1994)

[39] Peligrad, M., Sethuraman, S.: On fractional Brownian motion limits in one dimensional nearest-neighbor symmetric simple exclusion. ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. **4**, 245–255 (2008)

[40] Ravishankar, K.: Fluctuations from the hydrodynamical limit for the symmetric simple exclusion in Z^d. Stochastic Process. Appl. **42**, 31–37 (1992)

[41] Shiraishi, N.: Anomalous system size dependence of large deviation functions for local empirical measure. J. Stat. Phys. **152**, 336–352 (2013)

[42] Spohn, H.: Large Scale Dynamics of Interacting Particles. Springer, Berlin (1991)

[43] Sethuraman, S., Varadhan, S. R. S.: Large deviations for the current and tagged particle in 1D nearest-neighbor symmetric simple exclusion. Ann. Probab. **41**, 1461–1512 (2013)

[44] Yau, H.-T.: Relative entropy and hydrodynamics of Ginzburg-Landau models. Lett. Math. Phys. **22**, 63–80 (1991)

[45] Varadhan, S. R. S.: Nonlinear diffusion limit for a system with nearest neighbor interactions II. In: Asymptotic Problems in Probability Theory, Stochastic Models and Diffusions on Fractals. Pitman Research Notes in Mathematics Series, **283**, 75–128 (1994)

[46] Varadhan, S. R. S.: Self-diffusion of a tagged particle in equilibrium for asymmetric mean zero random walk with simple exclusion. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **31**, 273–285 (1995)